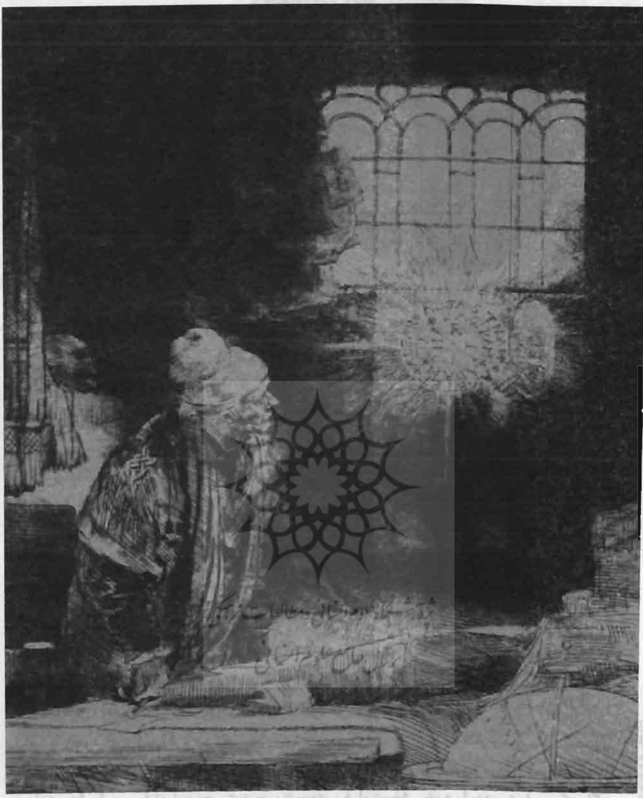
دکتر رقیه بهزادی

کیمیاگر یا فیلسوف

درباره‌ی کیمیاگری بسیار شنیده‌ایم، ولی هنوز موضوعی اسرارآمیز است. چه بسا سایه روشن شگفت‌انگیز طرحی را که «رامبراند» از کیمیاگر کشیده یا قصه‌هایی را که در نوشته‌های برخی نویسندگان خوانده‌ایم، به‌یاد داشته باشیم. آیا کیمیاگر، فیلسوفی بود که می‌خواست راز تبدیل فلزها را کشف کند؟ آیا تیرنگ‌بازی بود که غرق در سخنان نامفهوم، طلسم و وردخوانی بود؟ آیا پیشرو دانشمندان امروزی به‌شمار می‌رفت؟ یا دانشی مرموز داشت که در محیط امروزی، نمی‌توانیم از آن آگاه شویم؟

کیمیاگر در چشم معاصران خود، همه‌ی این ویژگی‌ها را داشت. به کتاب‌هایش می‌نگریم و از زیبایی تصویرهای آن‌ها و از دقتی که به‌کار رفته و از اشاره‌های مبهم زبان آن‌ها به‌شگفتی می‌افتیم. با وجود این، هنگامی که با دقت بیش‌تری توجه می‌کنیم، جهانی از فلسفه می‌یابیم که کم و بیش هم‌ارزی برای دین است: حکیم کهن‌سال و دانایی با کوره‌ها و بوته‌های آهنگری خود، همراه با کتاب‌های عالمانه‌ای که به‌او در آزمایش‌هایش کمک می‌کرد. او نیاز به‌تکامل شخصیت خود داشت. کیمیاگر اعتقاد داشت، نیرویی موجب روشن شدن اندیشه‌ی او شده و این از زمانی است که، شایستگی دریافت دانش را پیدا کرده است. ساختن طلا، به‌عنوان مهر، تاییدی بود که بر یک عمر کار و مطالعه، زده می‌شد. با توجه به‌شرایط تمدن کنونی ما، آن شمش‌های طلای کیمیاگری، به‌مراتب بیش از ارزش مادی آن فلز، هزینه برمی‌داشت.

با وجود این، کیمیاگر، در تاثیر جذبه‌ای قرار می‌گرفت که او را به‌کار وامی‌داشت. سفر پژوهشی او، یک فرایند شیمیایی نبود بلکه، جست و جویی برای مفهوم درونی سراسر جهان مادی به‌شمار می‌رفت. این جست و جو، نتیجه‌ی رضایت‌بخش خود را به‌دست آورد. کیمیاگر سهم خود را نسبت به‌دانش فکر بشر، به‌همان اندازه انجام داد، که کمک او به‌تکامل شیمی صورت گرفت.



کیمیاگر، طرحی از رامبراند

با وجود اعتقاد کیمیاگران که روش‌های آن‌ها در آزمایشگاه‌ها مانند روش‌های پیشگامان آن‌ها بود، می‌توان دید که «هنر کیمیاگری» به‌قول کیمیاگران، در طول سده‌ها به‌وجود آمده است. تا اندازه‌ای، «لوح سبز زمردین» که همه‌ی دانش آن‌ها برپایه‌ی آن استوار بود، در اصل، برپایه‌ی عرفان مصر باستان قرار داشت. تکامل بعدی، به‌وسیله‌ی حکیمان جهان بیرونی به‌منصه‌ی ظهور رسید و در آن محل تلاقی حکمت‌ها یعنی موزیون Muscion در اسکندریه متبلور شد. از آن جا بود که افکار و عقاید از راه امپراتوری روم گسترش یافت. پس از سقوط دولت روم، حکمای عرب به‌بررسی این فلسفه‌ی علمی شگفت‌انگیز ادامه دادند، سپس دانشمندان اروپا در سده‌های میانه آن را از شرق آموختند و از تعبیرهای حکیمانه‌ی خود برای آن موضوع بهره جستند. در دوره‌ی رنسانس، اندیشه‌ها هم در تاثیر احیای عقاید مرموز باستانی و هم در تاثیر نیاز برای کسب نتایج علمی قرار گرفت. به‌این ترتیب، می‌توان راه تازه‌ای برای پژوهش جست که به‌تکامل عرفان مسیحی مانند عرفان ژاکوب بریمیه (Jakob Boehme) و همچنین به‌تکامل اندیشه‌ی علمی مانند اندیشه‌ی مردانی نظیر ایزاک نیوتن منجر شد.

همراهی با کیمیاگر در بررسی هنر اسرارآمیز کاری شگفت‌انگیز است زیرا، از گروهی پیروی می‌شود که برخی از دانش و راز جهان باستان را به‌ما انتقال دادند، فلسفه‌ی کهنی که تنها می‌توان اصل و منشا واقعی آن را حدس زد.

کیمیاگری دارای آغاز مشخصی نیست. نخستین متن‌های آن، دارای جنبه هلنیستی است و بیش‌تر، به‌اسکندریه تعلق دارد. پیش از این متن‌ها، بخش اعظم کارهای قوم‌های مختلف تاثیرات بسیاری برآمیزه‌ی محیط فرهنگی مدیترانه‌ی شرقی در دوره‌ی هلنیستی داشت. دوره‌ای که سلسله‌ی بطلمیوسیان در مصر حکومت می‌کردند، زمان نضج فرهنگی به‌شمار می‌رفت.

فیلسوفان ایرانی، یهودی، یونانی و مصری پیوسته ترکیبات جدید و جالب توجهی به‌وجود می‌آوردند. درباره‌ی مسایل فلسفی، به‌اندازه‌ای مناقشه صورت می‌گرفت که شورش‌هایی برپا می‌شد و بعضی حتا کشته می‌شدند. طرفداران هرمکتب، مطمئن بودند که به‌حقیقت نهایی دست یافتند و تعلیمات آن‌ها باید برتر از دیگران باشد. داناترین آن‌ها، کسانی بودند که برای عرضه‌ی کالای خود در بازار فریاد برنمی‌آوردند و در جمع دوستان خود می‌کوشیدند رازهای جهانی را بیابند، که هم درون و هم بیرون از شخصیت آن‌ها قرار داشت. غیرطبیعی نبود که اسکندریه به‌صورت کانون چنین بررسی‌هایی درآمد. این شهر با همه‌ی راه‌های تجاری جهان باستان در تماس بود و در مرکز آن، عالی‌ترین مجموعه برای بررسی در موزیون و کتابخانه آن قرار داشت. نمی‌توان تصور کرد که این مرکز دانش هلنیستی از آرامش برخوردار بوده باشد.

اسکندریه، که به‌صورت بندر و محل بانک‌داری و مرکز توطئه سیاسی بود، محلی پر ازدحام و گیج‌کننده برای دانشمندان به‌شمار می‌رفت. با وجود این، در جای دیگری چنین مرکز دانش و اندیشه‌ای وجود نداشت.

در سرتاسر تاریخ، اکتشافات بسیاری از طلا، قلع و مس در نقاط مختلف، صورت گرفته است. درباره‌ی ارتباط فلزات با قوای طبیعی و خدایان، بررسی‌های بی‌شماری انجام یافته است. نتیجه‌ی این ارتباط، در کیمیاگری مهم بود، زیرا فلزات را با سیارات مربوط می‌دانستند. در مورد مس، ارتباط آن با ونوس (Venus) شاید به‌سبب ارتباط این فلز و این الهه با قبرس Cyprus (به‌معنای مس) و به‌این صورت، با جهان اندیشه‌ی متداول در دریای اژه باشد. نقره با ماه، هم در آمریکا قبل از اکتشاف این قاره و هم اروپا در ارتباط بوده است. سفیدی آن، شاید علت عمده‌ای برای این ارتباط به‌شمار آید.

ارتباط آهن با مارس (مریخ) به‌ظاهر اعتقادی متاخر است، زیرا آهن کشفی است که بعدها صورت گرفت. تاریخ آن اندکی پیش از ۲۰۰۰ قبل از میلاد، و از ناحیه‌ی قفقاز بود که در آن جا، مردم ضمن به‌کار بردن چوب بلوط برای ایجاد حرارت زیاد و به‌هنگام ذوب کردن در مناطق بادخیز آن را یافتند. ستاره‌شناسان کهن در بین‌النهرین، مارس را با نرگال Nergal، یعنی خدای جنگ یکی می‌دانستند. شاید این امر، مربوط به‌رنگ ستاره‌ی مذکور باشد که به‌نظر مانند آتشی دوردست می‌آمد یا به‌سبب تشابه آن با نوک پیکان مفرغی درخشان بود. به‌احتمالی در عصر آهن بود که سلاح‌هایی از این فلز تازه ساخته شد که آن را در ارتباط با مارس دانستند و مس را فلز ونوس به‌شمار آوردند.

فلسفه‌های اساسی مربوط به‌کیمیاگری به‌صورت آداب دینی درآمد و چنان با ستاره‌شناسی مربوط شد که می‌توان گفت دین بابلی‌ها در زمینه‌ی آن قرار داشت. همان‌گونه که گفته شد، لوح سبز زمردین چنان در ارتباط با اندیشه‌ی مصری بود که آن را می‌توان به‌کاهنان مصری، تا به‌کیمیاگران نسبت داد.

با وجود همه‌ی نومیدی‌ها، ضمن کوشش برای یافتن ریشه‌های واقعی کیمیاگری، ارتباطی پایدار میان اندیشه‌ی یونانی واندیشه‌ی مصری دیده می‌شود و آن عبارت از درک فلسفه‌ی ماهیت جهان است. درک دانش به‌منزله‌ی عقیده‌ی نیمه پنهانی بود که در کتاب‌ها شرح داده می‌شد، به‌شیوه‌ای که تنها عده‌ی معدودی معنای واقعی آن را می‌فهمیدند. در مصر در دوره‌ی فرمانروایی بطلمیوسیان، و در سراسر خاورمیانه، این جنبه از ویژگی‌های کاهنانی بود که مراسم گوناگونی را تعلیم می‌دادند و آن‌ها را هم به‌خط میخی و هم خط هیروگلیف می‌نوشتند که توده‌های بی‌سواد مردم، قادر به‌خواندن آن‌ها نبودند.

اسکندریه محل تلاقی ملت‌ها بود. در آن جا، یک پایگاه نظامی و گروهی از پیشه‌وران و آموزگاران سوریه‌ای و یک جامعه‌ی وسیع یهودی بود که درکرانه‌ی زیبای آن شهر می‌زیستند و در آن جا کنیسه‌ی عظیمی برپا ساختند که در آن، با آرامش مراسم دینی خود را به‌جای می‌آوردند. به‌این ترتیب، در یک شهر بزرگ، همه گونه اندیشه‌ای وجود داشت که به‌صورت عرفان کیمیاگرانه درآمد. در آن جا نیز، شیشه‌گران و فلزکاران ماهری بودند که به‌تقریب پیشه‌ی هزار ساله‌ی خود را ادامه می‌دادند.

سهم یونانیان در دانشی که به‌صورت کیمیاگری درآمد، فرایند استدلالی متفاوت با روشی بود که مصریان مبنی برتجربه و آزمایش داشتند و نه براساس دانش. یونانیان فیلسوفان و ریاضی‌دانان بزرگی پرورش داده بودند که به‌ساختار کیهان علاقه‌مند بودند و به‌این نتیجه رسیده بودند که یک ساختار عنصری باید وجود داشته باشد.

عناصر فرضی عبارت از زمین، هوا، آتش و آب بود. این خود، توصیف معقولی از طبیعت به‌شمار می‌آید. ارستو که ده سال بعد از تاسیس شهر اسکندریه درگذشت، نمونه‌ای از استدلال آینده را درباره‌ی ماده به‌دست داد و آن را با عناصر در ارتباط دانست. درواقع، عقاید ارستو درباره‌ی ماهیت ماده، نزدیک به‌دو هزار سال باقی ماند، زیرا به‌نظر معقول می‌آمد و هیچ دستگاه علمی وجود نداشت که آن را بررسی کند. بنابراین، جای شگفتی نبود که کیمیاگران با توجه به‌چهار عنصر و اخلاط چهارگانه عمل کنند و هر دانشمندی به‌این گونه استدلال نظر داشت.

مرزهای شرقی امپراتوری بیزانس جایگاه ارتباط میان قوای بشر و خداوند بود. پس از آن که ایران، سوریه و عراق به‌صورت بخشی از دستگاه خلافت درآمد، جای شگفتی نیست که بخشی از اعتقادات مانویان و نستوریان وارد اعتقادات کیمیاگران شد. به‌این ترتیب، زمینه برای یک مکتب اسلامی به‌وجود آمد که فراتر از ایمان ساده‌ی سرزمین‌های فتح شده پیش رفت. بعدها، به‌صورت تعلیمات صوفیان درآمد و افکار اسماعیلیان نیز در آن، رسوخ کرد.

نخستین نام مشهور در کیمیاگری از آن امیرخالد، برادر جوان خلیفه معاویه‌ی ثانی بود. می‌گویند وی در حدود ۶۶۶ تا ۷۰۴ در دمشق می‌زیست، در زمانی که لشکریان مسلمان در شمال افریقا با مقاومت بربرها روبه‌رو شدند و سپس، به‌سلطنت ویزیگوت‌ها (Visigoth) در اسپانیا دست یافتند. می‌گویند خالد در حدود هزار بیت مربوط به‌مسایل کیمیاگری سروده بود ولی، بیش‌تر آن‌ها به‌نظر مجعول می‌آید.

از: مارتین گاردنر
ترجمهٔ هرمز شهریاری

$$\sqrt{۲}$$

$\sqrt{۲}$ یعنی ریشهٔ دوم ۲ عددی است مانند: ... ۱/۴۱۴۲۱ ۳۵۶۲۳ ۷۳۰۹۵.

نقطه‌های پس از عدد نمایانگر آن است که این عدد تمام نشده و هنوز دنباله دارد. در محاسبهٔ $\sqrt{۲}$، هرچه محاسبه را ادامه دهیم نه به صفر می‌رسیم و نه در رقم‌های دهدهی آن به تکرار دوره‌ای برخورد می‌کنیم. گرچه رقم‌های دهدهی آن مانند رقم‌های دهدهی سایر عددهای گنگ (همچون π و e) شبیه دنباله‌ای از رقم‌های تصادفی به‌نظر می‌آیند، ولی به هیچ‌وجه نمی‌توان آنها را تصادفی دانست. چه اگر نسبت به عدد شناسایی داشته‌باشید، می‌توانید همیشه پس از هر انقطاعی در دنباله، عدد بعدی آن را محاسبه کنید. و نیز چنین عددهای گنگی را نمی‌توان «بی‌اُلگو» نامید، چون با هر دستوری که محاسبه می‌شوند، الگویی هم برای آنها فراهم می‌شود. برای نمونه، $\sqrt{۲}$ حد این کسر مسلسل (نامتناهی) می‌باشد:

$$\sqrt{۲} = ۱ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cfrac{۱}{۲ + \cdots}}}}$$

از این کسر مسلسل می‌شود نسبت‌های گویایی استخراج کرد که $\sqrt{۲}$ را تا هر تقریب دلخواه به‌دست دهد (مقصود از نسبت گویا کسری است که هم صورت و هم مخرج عدد درستی باشد). دنبالهٔ

$$\frac{۱}{۱}, \frac{۳}{۲}, \frac{۷}{۵}, \frac{۱۷}{۱۲}, \frac{۴۱}{۲۹}, \frac{۹۹}{۷۰}, \frac{۲۳۹}{۱۶۹}, \frac{۵۷۷}{۴۰۸}, \frac{۱۳۰۳}{۹۸۵}, \ldots$$

را درنظر بگیرید. این دنباله به یاد اُدوکس ستاره‌شناس و هندسه‌دان یونان باستان «نردبان ادوکس» (Eudoxeus) نامیده می‌شود، نسبت‌های نردبان ادوکس یک در میان، یکی بزرگ‌تر و دیگری کوچک‌تر از $\sqrt{۲}$ می‌باشند و هر نسبت از نسبت پیشین خود به $\sqrt{۲}$ نزدیک‌تر است. نزدیک‌ترین نسبت به $\sqrt{۲}$ که صورت و مخرج آن بیش از سه رقم نداشته‌باشد $\frac{۵۷۷}{۴۰۸}$ می‌باشد. این نسبت تا پنج رقم اعشار $\sqrt{۲}$ را می‌دهد. اگر یکی از نسبت‌های این دنباله را به‌صورت $\frac{a}{b}$ نمایش دهیم، نسبت پس از آن $\frac{a+۲b}{a+b}$ خواهد شد. توجه کنید که صورت هریک از پله‌های نردبان برابر است با حاصل‌جمع مخرج خودش با مخرج پلهٔ پیشین.

دیوید وِلز در «فرهنگ عددهای جالب و شگفت» خود، پاره‌ای از خاصیت‌های $\sqrt{۲}$ و ضریب‌های آن را بیان می‌کند.

برای نمونه: در یک خط مضرب‌های درست $\sqrt{۲}$ را بنویسید، سپس اعشار آن‌ها را حذف کنید، یعنی به‌جای $۱ \times \sqrt{۲}$ بنویسید ۱ و به‌جای $۲ \times \sqrt{۲}$ بنویسید ۲ و به‌جای $۳ \times \sqrt{۳}$ بنویسید ۴ تا دنباله‌ای مانند (... ,۸ ,۷ ,۶ ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱) به‌دست آورید. آن‌گاه عددهای صحیحی که در این دنباله وجود ندارد، به‌ترتیب زیر همین دنباله بنویسید به‌صورت زیر:

۱	۲	۴	۵	۷	۸	۹	۱۱	۱۲،	...
۳	۶	۱۰	۱۳	۱۷	۲۰	۲۳	۲۷	۳۰،	...

هریک از عددهای ردیف بالا را از عددهای ردیف پایین کم و سپس نصف کنید و زیر ستون مربوط بنویسید، سلسله عددهای صحیح (... ,۵ ,۴ ,۳ ,۲ ,۱) را به‌دست خواهید آورد و یا می‌توان گفت تفاوت هریک از عددهای ردیف بالا و پایین در ستون nام، برابر است با دو برابر n. به‌طور مثال در ستون ۴ تفاوت میان ۱۳ و ۵ می‌شود ۸.

عددهای نرمال

ریشهٔ nام هر عدد صحیح مثبت، درصورتی‌که خود این عدد توان nام عددی نباشد، عددی است گنگ. رقم‌های اعشاری تمام این ریشه‌های گنگ نه تصادفی هستند و نه بی‌اُلگو. تمام آن چیزی هستند که به آن‌ها «عددهای طبیعی» می‌گوییم و چنین استنباط می‌شود که اگر الگویی عددی - یک‌رقمی، دورقمی، سه‌رقمی و جز این‌ها - انتخاب کنیم، طی عمل‌هایی طولانی این الگو درست با همان تواتری که انتظارش را داریم خود را نشان خواهد داد. با این شرط که احتمال یافتن هر رقم مفروضی را در جای مفروضی، باید $\frac{۱}{۱۰}$ درنظر گرفت.

الگوی انتخابی لازم نیست از رقم‌های پشت سرهم تشکیل شده‌باشد، میان رقم‌های الگو می‌تواند فاصله‌های دلخواه وجود داشته‌باشد. به‌طور مثال می‌توان الگویی مانند $a.b.c$ انتخاب کرد، طوری‌که فاصله میان a و b هفت رقم و میان c, b صد رقم باشد. تمام آزمایش‌هایی که تابه‌حال برای تعیین تواتر چنین الگوهایی انجام گرفته، نشان داده است که تمام ریشه‌های گنگ، در هر مبنای عددنویسی، نرمال می‌باشند.

افزون بر ریشه‌های گنگ، آزمایش‌های مشابهی روی عددهای گنگ مشهور، همچون π و e و φ (یا نسبت طلایی) انجام گرفته و هیچ‌یک در نرمال بودن خود، انحرافی نشان نداده‌اند، در این باره گسترده‌ترین آزمایش‌ها روی π به‌عمل آمده و تا صدها میلیون رقم محاسبه شده‌است. ولی از $\sqrt{۲}$ اطلاع درستی در دست

ندارم، گرچه این را می‌دانم که در سال ۱۹۷۱ به‌وسیلهٔ ژاک دوتکا (Jacques Dutka) ریاضی‌دان آن زمان دانشگاه کلمبیا، تا بیش از یک ملیون رقم محاسبه شده‌است. با این وصف، نباید تصور شود که همهٔ عددهای گنگ نرمال هستند. نمونهٔ بارز آن کسر دودویی ... ۰٫۱۰۰۱۰۰۰۱۰۰۰۰ می‌باشد. روشن است که این عدد گویا نیست و درضمن نرمال نیز نمی‌باشد.

$\sqrt{2}$ و فیثاغوریان

این فیثاغوریان بودند که پیش از دیگران به ریشه‌های گنگ پی بردند. در یونان باستان جمعیتی سری وجود داشت که به انجمن برادری فیثاغوریان مشهور بود. این کشف به زبان هندسی چنین بیان می‌کند که: قطر مربع به ضلع واحد، اندازه‌ناپذیر است. هیچ خط‌کشی، هرچه هم ظریف و ریز درجه‌بندی شده‌باشد، نمی‌تواند به‌درستی قطر این مربع را اندازه‌گیری کند. اگر ضلع مربع گویا باشد، قطرش گنگ است و اگر قطرش گویا باشد، ضلعش گنگ.

دو افسانه دربارهٔ اثر انفجارآمیز این کشف در میان است. یک افسانه می‌گویند آن‌هایی که به این موضوع آگاهی یافتند، سوگند یاد کردند که این راز را همچنان پنهان نگه‌دارند، تا به ایمان فیثاغوریان لطمه‌ای وارد نیاید. چون فیثاغوریان بر این باور بودند که اندازهٔ هرچیزی را به‌طور دقیق می‌توان با عدد بیان کرد. در این میان یکی از فیثاغوریان به نام هیپارخوس (Hiparchus) چون پیمان را شکست، در دریا غرق شد، حال سبب این واقعه خشم خدایان بود یا قتل و یا خودکشی، در این باره روایت‌های گوناگونی وجود دارد.

افسانهٔ دیگری می‌گوید: فیثاغوریان این کشف بزرگ را با قربانی کردن چندین گاو نر در راه خدایان، جشن گرفتند. کشف نسبت‌ناپذیری پاره‌خط‌ها تأثیر عمیقی روی افلاتون داشته‌است، به‌طوری‌که در «قوانین» خود به‌شرح گسترده‌ای در این‌باره می‌پردازد.

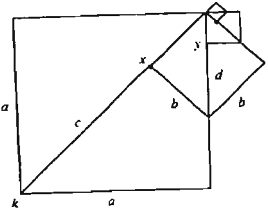
برهان خلف

یونانی‌ها نسبت‌ناپذیری ضلع مربع به قطرش را از راه برهان خلف به‌طریق ظریفی مطابق طرح شکل ۱ به‌اثبات رساندند. فرض می‌کنیم که ضلع بزرگ‌ترین مربع شکل ۱ با قطرش نسبت‌پذیر باشد.

در چنین حالتی هریک از دو پاره‌خط (ضلع و قطر) مضرب‌هایی از یک واحدش k می‌باشند، بدین معنی که طول واحدش k می‌تواند در هر دو پاره‌خط به تعداد درستی بگنجد. حال نقطهٔ x را روی قطر این مربع طوری انتخاب می‌کنیم که $c = a$ باشد. از نقطهٔ x مربع کوچک‌تری به ضلع b رسم می‌کنیم. چون این مربع با مربع اصلی متشابه است، پس ضلع b این مربع کوچک و همچنین قطرش، هریک مضربی از k هستند. یعنی ضلع b این مربع با قطرش نسبت‌پذیر خواهند بود. حال y را طوری انتخاب می‌کنیم که $d = b$ باشد. باز هم ضلع و قطر این مربع کوچک‌تری که به‌دست آمده به معیار k نسبت‌پذیر خواهند بود. این عمل می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند و می‌توانیم مربع چهارم و سپس پنجم، ششم . . . را بسازیم. ضلع هیچ‌کدام از این مربع‌ها نمی‌تواند صفر باشد، ولی در یکی از این عمل‌ها به مربعی می‌رسیم که ضلعش کوچک‌تر از k است، طول کمتر از k نمی‌تواند مضربی از k به‌حساب آید.

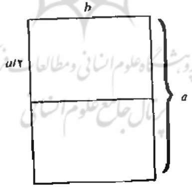
روبه‌رو شدن با این تناقض می‌رساند که فرض نسبت‌پذیری ضلع و قطر مربع، نادرست است. اگر ضلع مربع ۱ باشد، قطرش $\sqrt{2}$ می‌شود و ما نشان داده‌ایم که $\sqrt{2}$ گنگ است.

استدلال را به این‌گونه نیز می‌توان بیان کرد، که اگر مقیاسی مثل k می‌توانست در قطر و ضلع مربع صدق کند، در این عمل‌های مربع‌سازی به یک رشتهٔ نامحدود از عددهای صحیح (مضرب‌های k) هریک کوچکتر از دیگری برخورد می‌کردیم که به‌ناچار باید در جایی پایان پذیرد.



شکل ۱- استدلال از راه برهان خلف که می‌گوید $\sqrt{۲}$ گنگ است.

هوگو اشتین‌هاوس (Hugo Steinhaus) به‌گونه‌ای دیگر، ولی از همین راه، و به‌طریق هندسی به استدلال می‌پردازد. مستطیل شکل ۲ را درنظر بگیرید. ضلع‌های مستطیل به نسبتی هستند که اگر مستطیل را، همان‌طور که نشان داده شده، به دو نیمه کنیم، هریک از نیمه‌ها مستطیلی خواهند بود مشابه با مستطیل اصلی. اگر پهلوهای مستطیل اصلی a و b باشند، نسبت a به b مثل نسبت b به $\frac{a}{۲}$ خواهد بود و از آن‌جا نتیجه می‌شود که اگر b را مساوی واحد بگیریم، a مساوی $\sqrt{۲}$ خواهد شد.

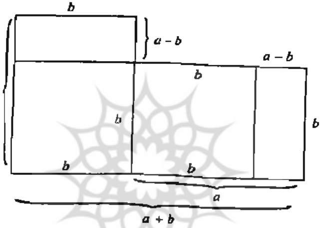


شکل ۲- استدلال دیگری از راه برهان خلف

فرض کنید a و b نسبت‌پذیر باشند، در این‌صورت هر ضلع مضربی از واحد k می‌شود. روشن است که k می‌تواند از هر نوع واحدی - اینچ، سانتی‌متر و یا جز این‌ها - باشد.

در شکل ۳، در کنار و روی ضلع طولی مستطیل ab، مستطیل همنهشتی که ربع دایره در جهت عقربه‌های ساعت چرخیده، قرار داده‌ایم، این عمل مستطیل بزرگ‌تری با ضلع‌های b و $(a+b)$ ایجاد کرده‌است. با جدا کردن دو مربع، هریک به ضلع b، از این مستطیل بزرگ، مستطیل کوچکتری به‌جا می‌ماند به ضلع‌های b و $(a-b)$. چون a و b عددهای درستی هستند پس $(a-b)$ نیز باید عددی درست باشد. بنابراین ضلع‌های مستطیل کوچک نیز مضربی از k خواهند بود.

همین عمل را با جدا کردن دو مربع از مستطیل b و $(a-b)$ تکرار می‌کنیم تا باز مستطیل کوچک‌تری مشابه با مستطیل b و $(a-b)$ به‌دست آوریم که ضلع‌هایش باید مضربی از k باشند. اگر این عمل را به‌همین طریق ادامه دهیم، زمانی به مستطیلی خراهیم رسید که ضلع‌هایش کوچک‌تر از k می‌شود. در این‌جا ما به تناقض برخورد کرده‌ایم، این می‌تواند تا بی‌نهایت ادامه پیدا کند، ولی نمی‌شود دنباله‌ای نامحدود از عددهای صحیحی که کوچک‌تر و کوچک‌تر می‌شوند وجود داشته‌باشد بنابراین a و b نسبت‌ناپذیر می‌باشند و $\sqrt{2}$ گنگ.



شکل ۳

از طریق جبر با روش برهان خلف، می‌توان ثابت کرد که ریشهٔ nام هر عددی - درصورتی‌که این عدد خود توان nام عددی دیگر نباشد، گنگ است.

برگه‌های کاغذ انگلیسی و اروپایی به‌طور معمول دارای عرض و طولی به‌نسبت ۱ و $\sqrt{2}$ می‌باشند و این سبب می‌شود که اگر برگه‌ای را نصف یا ربع و یا دو برابر یا چهار برابر ... کنیم، برگه‌های به‌دست آمده مشابه برگهٔ اصلی باشند و نسبت ضلع‌های آن‌ها نیز همان ۱ به $\sqrt{2}$ باقی بماند.

زوج و فرد

یونانیان باستان نیز با بهره‌گیری از قانون‌های زوج و فرد و از راه‌های زیبا و ظریفی، گنگ بودن $\sqrt{2}$ را به‌اثبات می‌رساندند. از میان طرق گوناگون، به‌نظر می‌آید که روش زیر از همه آسان‌تر باشد.

فرض کنید a وتر یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین به ضلع b باشد، بنابر قضیهٔ فیثاغورس می‌دانیم که $a^2 = 2b^2$ و یا $\frac{a^2}{b^2} = 2$ چون در این مثلث a بزرگ‌تر از b و کوچک‌تر از $2b$ است پس کسر $\frac{a}{b}$ بین

۱ و ۲ قرار دارد. فرض کنید که این کسر $\frac{a}{b}$ تا حد ممکن کوچک‌شده باشد، یعنی صورت و مخرج آن دارای هیچ مقسوم‌علیه مشترکی به‌جز ۱ نباشد. می‌دانیم b از ۱ بزرگ‌تر است وگرنه $\frac{a}{b}$ برابر عددی صحیح می‌شود.

سمت راست $a^{2} = 2b^{2}$ عددی است زوج، پس سمت چپ آن یعنی a^{2} نیز زوج است. چون ریشهٔ دوم هر عدد زوجی، زوج است، اگر a^{2} زوج باشد، a نیز باید زوج باشد. پس به‌جای a می‌توانیم $2x$ قرار دهیم، x هم می‌تواند هر عدد صحیح باشد. چون مجذور $2x$ می‌شود $4x^{2}$، بنابراین می‌توانیم بنویسیم $2b^{2} = 4x^{2}$ و یا $b^{2} = 2x^{2}$. سمت چپ این معادله زوج است، پس b^{2} یعنی سمت راست آن نیز باید زوج باشد و درنتیجه b نیز زوج می‌شود. چون هم a و هم b زوج‌اند، پس هردو به ۲ بخش‌پذیرند و این با فرض ما که $\frac{a}{b}$ تا حد ممکن کوچک شده‌است، تناقض پیدا می‌کند. بنابراین معلوم می‌شود که $\frac{a}{b}$ نمی‌تواند کسر گویایی بین ۱ و ۲ باشد یعنی $\frac{a}{b}$ که همان $\sqrt{2}$ است، باید گنگ باشد.

این استدلال را اقلیدس در کتاب دهم *اصول* آورده و ارسطو در بسیاری از جاها به آن اشاره کرده است. بنا به نوشتهٔ افلاطون، تئودورس فیلسوف و هندسه‌دان هم گنگ بودن ریشهٔ دوم همهٔ عددهای غیرمجذور از ۳ تا ۱۷ را ثابت کرده‌است. متأسفانه هیچ‌یک از نوشته‌هایش به‌جا نمانده و ما نمی‌دانیم چگونه این عمل را انجام داده و یا چرا تا عدد ۱۷ متوقف شده‌است. این تئودورس چون منکر خدایان یونانی بود، او را از سیرن بیرون کردند.

با تغییر و تبدیل‌های مناسبی می‌توان استدلال زوج و فرد را همان‌طور که دربارهٔ $\sqrt{2}$ به‌کار گرفته شد، دربارهٔ ریشه‌های nام تمام عددهایی که توانی از n نیستند، عمومیت داد.

استدلال‌های پیشین هم بر پایهٔ برهان خلف استوارند، یعنی فرضی به میان می‌آوریم و سپس چون برمبنای این فرض به تناقض برخورد می‌کنیم، ثابت می‌شود که فرض نادرست بوده است. یکی دیگر از راه‌های شگفت‌انگیز استدلال گنگ بودن، از راه برهان خلف، برپایهٔ رقم مجذور عددها استوار است. با یک توجه جزئی دیده می‌شود که رقم آخر مجذور هر عددی باید یکی از این عددها باشد: ۰، ۱، ۴، ۵، ۶ و یا ۹. حال دوباره به معادلهٔ $a^{2} = 2b^{2}$ برمی‌گردیم، که در آن $\frac{a}{b}$ تا آخرین حد کوچک شده‌است و b بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد. رقم پایانی a^{2} و همچنین b^{2} باید یکی از شش رقم یاد شدهٔ بالا باشد. در سمت راست $a^{2} = 2b^{2}$، b^{2} در ۲ ضرب شده‌است، پس رقم پایانی $2b^{2}$ باید ۰، ۲ و یا ۸ باشد ولی ۲ یا ۸ نمی‌تواند باشد، چون رقم پایانی a^{2} نمی‌تواند ۲ و یا ۸ باشد، پس تنها می‌تواند ۰ باشد. بنابراین هم a^{2} و هم $2b^{2}$ باید به صفر پایان بیابند و از آن‌جا معلوم می‌شود که a باید به صفر ختم شود و b به صفر یا پنج. در هر حالتی هردوی a و b قابل‌قسمت به ۵ خواهند بود و این خلاف فرض ماست که $\frac{a}{b}$ را کسری ساده‌نشدنی در نظر گرفته‌بودیم. بنابراین $\frac{a}{b}$ گنگ و $\sqrt{2}$ نیز گنگ است.

در سایر دستگاه‌های شمار، گنگ بودن $\sqrt{2}$، از روی رقم پایانی را می‌توان به طریقی مشابه بالا به اثبات رساند. این عمل در دستگاه شمار به‌مبنای دو از همه ساده‌تر است: سمت راست $a^{2} = 2b^{2}$ به تعدادی زوج از صفر و سمت چپ به تعدادی فرد از صفر پایان می‌پذیرد.

بسیاری از استدلال‌های زیبای گنگ بودن $\sqrt{2}$ بر پایهٔ قضیهٔ بنیادی حساب استوار است که می‌گوید: هر عددی حاصل‌ضرب چند عدد اول منحصر به فرد است. در این‌جا یکی از آسان‌ترین آن‌ها را می‌آوریم. باز هم

معادلهٔ $a^2 = 2b^2$ را درنظر می‌گیریم که در آن $\frac{a}{b}$ را کسری گویا و ساده‌نشدنی و b را بزرگ‌تر از ۱ فرض کرده‌ایم. a^2 باید شامل تعداد زوجی از عامل‌های اول باشد، چراکه اگر a حاصل‌ضرب چند عامل اول - چه به تعداد زوج و چه به تعداد فرد - باشد، a^2 که مجذور آن است، به تعداد دو برابر آن، عامل اول خواهد داشت.

حال سمت راست $a^2 = 2b^2$ را ملاحظه کنید که تعداد عامل‌های اول آن فرد است، چراکه به تعداد عامل‌های اول، که زوج است، عامل اول ۲ را اضافه کرده‌ایم. در این‌جا به یک تناقض برخورد کرده‌ایم، چون تعداد عامل‌های اول دو طرف معادله نمی‌تواند در یک طرف فرد باشد و در طرف دیگر زوج. به‌سادگی می‌توان دید که این استدلال را برای ریشهٔ دوم هر عدد اولی و یا هر عددی که تعداد عامل‌های اول آن فرد باشد، می‌توان به‌کار برد.

تجزیه به عامل‌های اول وسیلهٔ ساده‌ای است برای اثبات این‌که هر ریشهٔ دومی که عدد صحیحی نباشد، ناگزیر گنگ است. ما نخست این وسیله را برای $\sqrt{2}$ به‌کار می‌ریم: از $a^2 = 2b^2$ معلوم می‌شود که $b^2 = \frac{a^2}{2}$ و یا $b^2 = a \times \frac{a}{2}$. اگر عدد اولی حاصل‌ضرب دو عدد x و y را بشمارد، روشن است که یا x را می‌شمارد و یا y را.

فرض کنید $\frac{a}{2}$ و a دو عدد باشند که حاصل‌ضربشان $\frac{a^2}{2}$ است. چون b بزرگ‌تر از ۱ است، باید عدد اولی وجود داشته‌باشد که b^2 را بشمارد. همین عدد اول باید سمت راست‌معادله یعنی $a \times \frac{a}{2}$ را نیز بشمارد. بنابراین باید $\frac{a}{2}$ و یا a را بشمارد. چه a، و چه $\frac{a}{2}$ در هر صورت a شمرده می‌شود، چراکه اگر نصف a شمرده شود، خود a نیز شمرده می‌شود. در این‌جا نشان دادیم که عدد اولی یافت می‌شود که‌هم a و هم b را می‌شمارد، یعنی $\frac{a}{b}$ نمی‌تواند کسر گویایی ساده نشدنی باشد که این، فرض اولیهٔ ما را نقض می‌کند.

به‌جای عدد a هر عدد دیگری - که ریشه‌اش عددی صحیح نباشد - بگذارید و همین استدلال را دربارهٔ آن به‌کار برید و نتیجه بگیرید که ریشهٔ دوم هر عددی - که ریشه‌اش عدد صحیحی نباشد - گنگ است. دست‌آخر این استدلال را می‌توان عمومیت داد و آن را برای تمام ریشه‌های nام عددهایی که توان nام نباشند، به‌کار برد.

یکی دیگر از راه‌های ساده که گنگ بودن $\sqrt{2}$ را آشکار می‌کند، برپایهٔ نابرابری‌ها استوار است. باز هم از معادلهٔ $a^2 = 2b^2$ داریم $\frac{a}{b} = \sqrt{2}$. اگر $\frac{a}{b}$ کسری ساده نشدنی باشد برابر با $\sqrt{2}$، چون $\sqrt{2}$ عددی است بین ۱ و ۲، پس باید b کوچک‌تر از a و a کوچک‌تر از $2b$ باشد، یعنی $b < a < 2b$. با اضافه کردن $-b$ به نامساوی‌ها داریم $b - b < a - b < 2b - b$ و یا $a - b < b$.

حال معادلهٔ $a^2 = 2b^2$ را به‌صورت‌های زیر درمی‌آوریم: $a^2 - ab = 2b^2 - ab$ و یا $a(a-b) = b(2b-a)$ و یا $\frac{a}{b} = \frac{2b-a}{a-b}$.

از طرف دیگر دانستیم $a - b < b$. پس کسر $\frac{a}{b}$ را توانستیم به‌صورت $\frac{2b-a}{a-b}$ درآوریم که مخرجش کوچک‌تر از مخرج $\frac{a}{b}$ است، یعنی $\frac{a}{b}$ هنوز قابلیت کوچک شدن دارد، که این خود متناقض با آن است که

$\frac{a}{b}$ را تا آخرین حد کوچک شده می‌دانستیم، بنابراین $\frac{a}{b}$ نمی‌تواند کسری گویا باشد. این استدلال را به ریشهٔ nام هر عددی هم که توان nام نباشد می‌توان عمومیت داد.

برای اثبات گنگ بودن ریشهٔ درم عددهایی که توان دوم نباشند، راه‌های زیادی وجود دارد که بیشتر آن‌ها به‌آسانی برای ریشهٔ nام نیز به‌کار می‌رود. همهٔ این راه‌حل‌ها به قضیه زیر ارتباط پیدا می‌کند: اگر $\frac{a}{b}$ کسر گویایی باشد و تا آخرین حد کوچک شود و b بزرگ‌تر از ۱، آن‌وقت هر توانی از $\frac{a}{b}$ نیز کسری خواهد بود گویا و غیر قابل کوچک شدن.

این قضیه را می‌توان با استفاده از عامل‌های اول به‌اثبات رساند. فرض کنید $\frac{a}{b}$ که در آن b بزرگ‌تر از ۱ می‌باشد، کسری ساده‌نشدنی باشد، پس a هیچ عامل مشترکی با b ندارد، به‌عبارت دیگر در اثر کوچک شدن کسر، عامل‌های مشترک میان صورت و مخرج کسر، حذف شده‌اند. حال به مجذور $\frac{a}{b}$ توجه کنید، عامل‌های اول بالای خط کسری همان عامل‌های پیشین هستند که دو بار تکرار شده‌اند و عامل‌های اول زیر خط کسری نیز همین حالت را دارند و میان صورت و مخرج عامل مشترکی وجود ندارد. این می‌رساند که مجذور یک کسر گویای کوچک شده کسر دیگری است غیر قابل کوچک شدن و نمی‌تواند برابر یک عدد صحیح مثبت باشد. یعنی هیچ عدد صحیح مثبتی نمی‌تواند مجذور کسری گویا باشد و یا به‌عبارتی دیگر هیچ عدد صحیح مثبتی نمی‌تواند دارای جذری گویا باشد.

روشن است، استدلال برای کعب و یا ریشه‌های بالاتر نیز صادق است. برای نمونه $\frac{a^3}{b^3}$ عبارت است از $\frac{a \times a \times a}{b \times b \times b}$. این کسر نیز کوچک‌ناشدنی است، زیرا هیچ عامل اول مشترکی میان بالا و پایین خط کسری وجود ندارد تا بتوان آن‌ها را حذف کرد. آیا راهی آسان‌تر و ساده‌تر از این می‌توان یافت تا نشان دهد که ریشه‌های nام - عددهای صحیحی که توان nام نباشند - گنگ هستند؟

در دورهٔ تحصیل دبیرستان زمانی که من [مارتین گاردنر] برای نخستین بار متوجه شدم $\sqrt{2}$ نمی‌تواند به‌صورت کسری گویا بیان شود، برایم باورکردنی نبود. ساعت‌های زیادی را در دوره‌های تحصیلی صرف پیدا کردن دورهٔ گردش چنین کسری کردم تا سرانجام پذیرفتم، چنین چیزی ناممکن است. اما امروز هیچ خاطره‌ای از چگونگی عمل‌های آن روزها ندارم و نمی‌دانم آیا درحقیقت راهی برای اثبات گنگ بودن آن پیدا کردم؟ و دلم می‌خواست، آن راه اکنون یکی از دلیل‌هایی می‌بود که در این مقاله آورده می‌شد. این موضوع برایم خیلی جالب است تا بدانم، چند ریاضی‌دان، در روزهای جوانی، تجربه‌هایی مشابه من داشته‌اند.

توجه داشته‌باشیم، در تمام استدلال‌های این مقاله از روش برهان خلف استفاده شده‌است و این نشان می‌دهد که این نوع استدلال تا چه حد نیرومند است.