بهره‌گیری از آمارهای حیاتی در بیمه‌های عمر

دکتر محمدرضا مشکانی*

۱- مقدمه

برای روشن ساختن اهمیت جدول عمر در بیمه ـ آمارشناسی یا محاسبات فنی بیمه، ساده‌ترین نوع بیمهٔ زندگی را در نظر می‌گیریم. می‌دانیم که هر بیمه قراردادی است بین بیمه‌گذار (مشتری) و بیمه‌گر (عرضه‌کنندهٔ بیمه). در نوع بیمهٔ کل عمر، بیمه‌گر تعهد می‌کند که در زمان معینی پس از آنکه مرگ بیمه‌گذار اتفاق افتاد، یک واحد پول (مثلاً، یک میلیارد ریال یا یکصد هزار دلار یا یک میلیون روپیه،...) به ذینفع یا نمایندهٔ بیمه‌گذار بپردازد. برای ساده شدن مطلب فرض می‌کنیم که مبلغ حق بیمه ثابت است و در یک قسط پرداخت می‌شود ولی زمان پرداخت که زمانی بعد از وقوع مرگ است، متغیری تصادفی است. بدین ترتیب، مثلاً اگر بیمه‌گذار در خلال سالی که قرارداد بسته می‌شود بمیرد در ابتدای سال بعد یک واحد پول دریافت خواهد کرد. در صورتی که نرخ بهرهٔ مورد عمل i باشد، یک واحد پول در انتهای سال اول در زمان عقد قرارداد دارای ارزش فعلی $V=1/(1+i)$ است که به آن نرخ تنزیل می‌گویند. پس، اگر ارزش فعلی پول پرداخت شده به بیمه‌گذار را با متغیر تصادفی Z نشان دهیم، این متغیر می‌تواند مقادیر V یا V^2 یا V^3،... را اختیار کند و این در صورتی است که مرگ بیمه‌گذار به ترتیب در خلال سال ۱ یا ۲، یا ۳،... پس از عقد قرارداد رخ دهد. فرض کنیم شخص X ساله‌ای (مثلاً مرد ۴۰

---

* استاد آمار، دانشگاه شهید بهشتی، تهران

ساله‌ای) در روز تولد X سالگی خود و در حالی که از سلامت کامل برخوردار است، برای خود بیمه نامهٔ کل عمر بخرد. این شخص در ازای دریافت چنین تضمینی از بیمه‌گر، چه مبلغی باید بپردازد؟ این مبلغ را حق بیمهٔ خالص تک قسطی می‌نامند و با A_x نشان می‌دهند. بدیهی است برای آنکه بیمه‌گر و بیمه‌گذار به توافق برسند، باید آنچه که به دست می‌آورند و از دست می‌دهند، یا به عبارت دیگر سود و زیان بالقوهٔ آنها برابر باشند. چون مبلغ پرداختی Z به بیمه‌گذار تابعی از عمر اوست و طول عمر تصادفی است، باید توزیع ارزش فعلی مبلغ پرداختی Z را به دست آورد و سپس میانگین آن را پیدا کرد تا حق بیمهٔ خالص تک قسطی تعیین گردد. روشن است که اگر شخص پس از عقد قرارداد، K سال کامل عمر کند و در خلال سال بعد بمیرد، خواهیم داشت:

$$Pr\ (Z=V^{k+1})=Pr\ (K=k),k=0,1,2,... \qquad (۱)$$

برای بدست آوردن مقدار این احتمال از نشانه‌های زیر استفاده می‌کنیم: زنده ماندن شخص X ساله را تا پایان سال K با نماد B و مردن او در خلال سال بعد را با نماد C نشان می‌دهیم. فرمول (۱) در واقع، عبارت است از:

$$Pr(K=k)=Pr(B,C)=Pr(B)Pr(C/B)$$

در عرف بیمه، نمادهای خاص $Pr(B)={}_kp_x$ و $Pr(C/B)=q_{x+k}$ را بکار می‌برند. نماد، ${}_kp_x$ احتمال رسیدن X ساله به سن کامل X+k سالگی است. نماد q_{x+k} احتمال مردن شخص X+k ساله در خلال یک سال بعد است. یعنی، احتمال اینکه شخص X ساله، تعداد k سال کامل زنده بماند و در خلال سال بعد بمیرد برابر است با:

$$Pr[Z=V^{k+1}]=Pr[K=k]={}_kp_x\cdot q_{x+k} \qquad (۲)$$

از روی فرمول (۲) میانگین مبلغ پرداختی به بیمه‌گذار که برابر با حق بیمهٔ خالص است بدست می‌آید.

$$A_x=E[Z=V^{k+1}]=\sum_{k=0}^{\infty} V^{k+1}\cdot {}_kp_x\, q_{x+k}$$

فرمول (۲) ساده‌ترین فرمول مورد استفاده در بیمه‌های عمر است. هر محاسبهٔ دیگری در بیمه همچون (۲) به مقادیر ${}_kp_x$ و q_{x+k} به‌ازای مقادیر مختلف سن بیمه‌گذاران (X) و

تعداد سالهای زنده ماندن او پس از عقد قرارداد نیاز دارد. جدولی که در آن مقادیر ${}_kp_x$ یا q_{x+k} به‌ازای مقادیر مختلف x و k درج شده باشند، جدول عمر نامیده می‌شود و ابزار اساسی بیمه ـ آمارشناسی یا محاسبات فنی صنعت بیمه است.

در جدولهای عمر معمولاً احتمال مردن شخص X ساله طی یک سال بعد را درج می‌کنند و این احتمال را با q_x نشان می‌دهند. با دانستن q_x مقدار $p_x=1-q_x$ بدست می‌آید و از روی آن داریم:

$${}_kp_x = P_x \cdot P_{x+1} \cdot P_{x+2} \dots P_{x+k-1} \quad \text{و} \quad k=1,2,\dots$$

در صورتی که قرارداد بیمه چنان باشد که مبلغ مورد بیمه، در لحظهٔ مرگ پرداخت شود، نیاز به محاسبات زیر داریم. گیریم شخص بیمه شده به مدت T واحد زمان پس از عقد قرارداد عمر کند، که T متغیری است پیوسته $0<T<\infty$ و زمان T را به K سال کامل و کسری از سال یعنی S تجزیه می‌کنیم،

$$T=K+S \qquad \text{و} \qquad 0<S<1$$

در اینجا S نماد کسری از یک سال است که در آن شخص X ساله زنده بوده است. اگر فرض کنیم K و S مستقل از هم باشند، باید داشته باشیم

$$pr(S\leq u \mid K=k)= {}_uq_{x+k} / q_{x+k}=H(u)$$

یعنی $H(u)$ نباید به k بستگی داشته باشد و در آن صورت

$${}_uq_{x+k}=H(u)\, q_{x+k} \qquad \text{و} \qquad k=0,1,.. \qquad \text{و} \qquad 0\leq u\leq 1$$

با قبول مفروضات مختلف در بارهٔ احتمال مردن شخص طی کسری از یک سال، فرمول‌های مختلفی برای ${}_uq_{x+k}$ به دست می‌آید. مثلاً اگر فرض کنیم که مردن یک شخص در طی کسری از سال متناسب با مدت آن باشد یعنی در طول سال توزیع یکنواخت داشته باشد، آنگاه $H(u)=u$ و ${}_uq_{x+k}= uq_{x+k}$ این فرض را فرض خطی بودن ${}_uq_x$ می‌نامند. اگر فرض شود که به جای احتمال مردن، نیروی آنی مرگ در طی یک سال ثابت بماند، داریم ${}_uq_x=1-(p_x)^u$ و بالاخره تحت فرض بالدوچی مبنی بر خطی بودن ${}_{1-u}q_{x+u}$ برحسب $(1-u)$ یعنی به فرض ${}_{1-u}q_{x+u}=(1-u)q_x$ خواهیم داشت

$_{u}q_x = uq_x / [1-(1-u)q_x]$

در حالتی که مبلغ بیمه در لحظهٔ مرگ پرداخت شود، ارزش فعلی آن $Z=V^T$ بوده و حق بیمهٔ خالص تک قسطی از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود

$$\overline{A}_x = \int_0^\infty v^t\, g^{(t)}\, dt = \int_0^\infty v^t\, {}_tp_x\, \mu_{x+t}\, dt$$

که در آن μ_{x+t} نیروی آنی مرگ است که رابطهٔ آن با تابع چگالی عمر آتی $g(t)$ و تابع $G(t)$ توزیع طول عمر آتی به قرار زیر است:

$$\mu_{x+t} = g(t)/[1-G(t)] = -\frac{d}{dt} \ln {}_tp_x$$

که باز هم برای محاسبهٔ آن لازم است $_tp_x$ که یا مکمل آن $_tq_x$ را داشته باشیم. این مقدار به‌ازای مقادیر صحیح t در جدول عمر درج شده و به‌ازای مقادیر کسری t طبق فرض خطی، یا بالدوچی، و امثال آن محاسبه می‌شود. ملاحظه می‌شود که در هر نوع بیمه و در هر حال جدول عمر ابزار اساسی بیمه ـ آمارشناسی است. بیش از این نمی‌توان تأکید کرد که جدول عمر در هر محاسبه‌ای از انواع محاسبات بیمه ـ آمارشناسی به یک شکلی ظاهر می‌شود. در زیر شرح مختصری را در بارهٔ جدولهای عمر، و طرز ساختن آنها می‌آوریم. ذکر می‌کنیم. این جدول به کمک داده‌های سالهای ۱۳۶۹ ـ ۱۳۷۰ تهیه شده است.

۲- جدولهای عمر

دیدیم که برای انواع محاسبات بیمه‌ای برای شخص x ساله، توزیع احتمال عمر آتی او لازم است. این توزیع را از جدول عمر مناسب این شخص به دست می‌آورند. جدول عمر، جدولی است که احتمالهای مردن طی یک سال q_x را برای سنین مختلف x فراهم می‌سازد. همان‌طور که دیدیم مقادیر q_x و به پیروی از آنها مقادیر $p_x=1-q_x$ توزیع سالهای کامل k را کاملاً مشخص می‌سازند و به کمک آنها توزیع پیوسته عمر آتی T نیز قابل محاسبه است.

جدولهای عمر را با استفاده از داده‌های آماری می‌سازند. تشکیل جدول عمر شامل فنون برآورد، هموارسازی، و برون‌یابی است. جدولهای عمر برای گروههای جمعیتی ویژه، که از نظر عواملی مانند جنس، نژاد، نسل و نوع بیمه با هم فرق دارند، ساخته می‌شوند. در این جدولها سن آغازی x می‌تواند تأثیر مهمی داشته باشد. معمولاً بیمه عمر به افراد سالم فروخته می‌شود. منطقی است که انتظار داشته باشیم که شخصی که هم اکنون بیمه شده است و x ساله است از شخص مشابهی که چند سال قبل بیمه شده و در سن x سالگی است، در وضع سلامت بهتری باشد. جدولهایی را که در آنها چنین ملاحظاتی رعایت شده باشد، جدول عمر **انتخابی** گویند. برای رعایت سادگی در عرضهٔ مطلب به جدولهایی می‌پردازیم که برای جمعیتی خاص و برای دوره‌ای خاص تهیه شده‌اند و به آنها **جدول عمر جمعیتی** گویند. این نوع جدولها بر دو گونه‌اند: **جدول عمر نسلی** و **جدول عمر جاری**. در جدول عمر نسلی اطلاعات مربوط به مرگ ومیرهای مشاهده شده در یک نسل معین، مثلاً اطلاعات مربوط به زمان مرگ همهٔ افراد متولد ۱۳۰۱ خورشیدی، است که نسل ۱۳۰۱ را تشکیل می‌دهند.

روشن است که برای ساختن جدول نسلی باید اطلاعات مرگ ومیر یک نسل را که گاهی ممکن است بیش از یک قرن طول بکشد، گردآوری کرد. علاوه بر مشکل فوق، به واسطهٔ پیشرفت علوم و تغییر نحوهٔ زندگی، تسّری اطلاعات دهه‌های بسیار دور به افراد حاضر یا آینده چندان معقول نیست.

نوع دیگر جدولهای عمر، جدول عمر جاری است. این جدول بر پایهٔ استفاده از نرخ مرگ‌ومیر در سنین مختلف ساخته می‌شود، که این نرخها به نوبهٔ خود از روی داده‌ها و اطلاعات حیاتی جمعیت جاری در طی سالهای اخیر محاسبه می‌شوند. در این جدولها چون از اطلاعات حیاتی جمعیت معاصر استفاده می‌شود، تسّری آن به سالهای بعد منطقی‌تر است.

برای ساختن جدول عمر جاری از دو نوع آمارهای حیاتی بهره گرفته می‌شود: (۱) تعداد جمعیت هر گروه سنی در وسط سال مورد بررسی و (۲) آمار تعداد مرگ‌ومیر

گروههای سنی در آن سال.

چنین داده‌هایی هم از آمار ثبتی سازمانهای ثبت احوال کشورها و هم از طریق سرشماریها تأمین می‌شوند. در هر مورد وجود آمارهای ثبتی دقیق و روزآمد بسیار مغتنم بوده و می‌تواند از صرف بودجه‌های هنگفت برای گردآوری داده‌های جدید جلوگیری کند. نمونه‌ای از این نوع استفاده را در صفحه‌های بعد خواهیم دید.

جدولهای عمر یا به صورت **خلاصه**، یعنی برای گروههای سنی با فاصلهٔ بیش از یک سال (معمولاً برای گروهای سنی با فاصله‌های ۵ ساله) تنظیم می‌شوند، یا به صورت **کامل** برای همهٔ سنین محاسبه می‌گردند.

در زیر طرز ساخت یک جدول عمر خلاصه برای مردان تهران را به روش ناپارامتری و یک جدول کامل را با روش پارامتری (با استفاده از تابع پارامتری بقا از نوع گامپرتز) ارائه می‌کنیم. امّا پیش از آن ضروری است که ساختار یک جدول عمر را بطور خلاصه تشریح کنیم.

معمولاً یک جدول عمر استاندارد دارای ساختاری به صورت جدول ۲-۱ ذیل است. در این جدول سر ستونهای زیر را داریم که شرح هر یک مقابل آن ذکر می‌شود:

جدول ۲-۱ جدول عمر خلاصهٔ مردان تهران (۱۳۶۹-۱۳۷۰)

$[x, x+n)$	${}_nq_x$	l_x	${}_nd_x$	${}_nL_x$	T_x	e^0_x
۰-۱	۰/۰۲۶۴۴	۱۰۰۰۰۰	۲۶۴۴	۹۷۷۰۰	۶۵۱۶۶۵۸	۶۵/۱۶۷
۱-۵	۰/۰۰۵۱	۹۷۳۵۶	۴۹۷	۳۸۸۳۳۰	۶۴۱۸۹۵۸	۶۵/۹۵۲
۵-۱۰	۰/۰۰۳۵۵	۹۶۸۵۹	۳۴۴	۴۸۳۴۳۵	۶۳۳۰۶۲۸	۶۲/۲۶۲
۱۰-۱۵	۰/۰۰۳۲۷۸	۹۶۵۱۵	۳۱۶	۴۸۱۷۸۵	۵۵۴۱۱۹۳	۵۷/۴۷۵
۱۵-۲۰	۰/۰۱۱۱	۹۶۱۹۹	۱۰۶۸	۴۷۸۳۲۵	۵۰۶۵۴۰۸	۵۲/۶۵۵
۲۰-۲۵	۰/۰۱۱۳	۹۵۱۳۱	۱۲۸۱	۴۷۲۴۵۲	۴/۵۸۷۰۸۳	۴۸/۲۱۹
۲۵-۳۰	۰/۰۱۳۲	۹۳۸۵۰	۱۲۳۹	۴۶۶۱۵۲	۴۱۱۴۶۳۱	۴۳۸۴۳
۳۰-۳۵	۰/۰۱۲۷۲	۹۲۶۱۱	۱۱۷۸	۴۶۰۱۱۰	۳۶۴۸۴۷۹	۳۹/۳۹۹
۳۵-۴۰	۰/۰۱۷۹۶	۹۱۴۳۳	۱۹۲۹	۴۵۲۳۴۲	۳۱۸۸۳۹۶	۳۴/۸۷۱
۴۰-۴۵	۰/۰۲۷۹۵	۸۹۷۹۱	۲۵۱۰	۴۴۲۳۷۲	۲۷۳۶۰۲۷	۳۰/۵۶۹
۴۵-۵۰	۰/۰۴۱۴۵	۸۷۲۸۱	۳۶۱۸	۴۲۸۱۶۲	۲۲۹۳۶۵۵	۲۶/۲۳
۵۰-۵۵	۰/۰۶۶۲	۸۳۶۶۳	۵۵۳۸	۴۰۵۲۲۷	۱۸۶۵۴۹۳	۲۲/۲۵۶
۵۵-۶۰	۰/۰۹۲۴۲	۷۸۱۲۵	۷۲۲۰	۳۷۳۲۷۰	۱۴۶۰۲۶۶	۱۸۶۵۶
۶۰-۶۵	۰/۱۳۳۲	۷۰۹۰۵	۹۴۴۵	۳۳۱۵۳۰	۱۰۸۶۹۹۶	۱۵/۳۰۲
۶۵-۷۰	۰/۱۹۸۶	۶۱۴۶۰	۱۲۲۰۶	۲۷۷۳۰۲	۷۵۵۴۶۶	۱۲/۲۷
۷۰-۷۵	۰/۲۸۱۲	۴۹۲۳۴	۱۳۸۵۰	۲۱۲۰۴۰	۴۷۸۱۶۴	۹/۹۶
۷۵-۸۰	۰/۳۷۷۱	۳۵۴۰۴	۱۳۳۵۱	۱۴۳۹۱۰	۲۶۶۱۲۴	۷/۵۰۳
۸۰-۸۵	۰/۴۹۷۸	۲۲۰۵۳	۱۰۹۷۸	۸۲۹۷۵	۱۲۲۲۱۴	۵/۵۳۱
۸۵+	۱	۱۱۰۷۵	۱۱۰۷۵	۳۹۲۳۲	۳۹۲۳۲	۳/۵۳۶

۱- بازهٔ سنی $[x,x+n)$ که فاصلهٔ سن دقیق x تا $x+n$ سال را نشان می‌دهد و در آن $x=0$ سن تولد را نشان می‌دهد و n تعداد سالهاست مثلاً ۱-۰ یا ۲۰-۱۵ به ترتیب نمایندهٔ گروه صفر تا یک ساله و پانزده تا بیست ساله است.

۲- احتمال مرگ ${}_nq_x$ که احتمال مردن شخص x ساله را در خلال n سال بعد نشان

می‌دهد و چنانکه خواهیم دید از روی ستونهای دیگر جدول محاسبه می‌شود.

۳- تعداد زندگان با سن x که با l_x نمایانده می‌شود.

۴- تعداد مردگان در بازهٔ $[x,x+n)$ که با ${}_nd_x$ نشان داده می‌شود و برابر است با

${}_nd_x = l_x - l_{x+n}$

۵- تعداد نفر ـ سالهایی که توسط l_x فرد زنده در بازهٔ سنی $[x,x+n)$ زندگی شده است. معمولاً در مورد آنهایی که تا آخر دوره زنده نمانده‌اند فرض می‌شود که نصف دوره را زندگی کرده‌اند، یعنی ${}_nL_x = n(l_{x+n} + \frac{1}{2}\, {}_nd_x)$

۶- تعداد نفر سالهای زندگی شده توسط گروه بازمانده پس از x که با T_x نمایانده می‌شود، $T_x = \sum_{j=x}^{w-1} {}_nL_j = L_x + T_{x+1}$

که در آن w سن حدّی یا سنی است که انتظار می‌رود هیچ فردی بیش از آن سن زنده نماند.

۷- امید زندگی شخص x ساله که با e^0_x نشان داده می‌شود و برابر است با $e^0_x = \frac{L_x}{e^0_x}$

اگر جدول عمر کامل باشد، طبق تعریف $e_x = \sum_{k=1}^{\infty} k\, P_r(K=k) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot {}_kp_x\, q_{x+k}$

و تقریب آن عبارت است از $e^0_x \approx e_x + \frac{1}{2}$

اکنون با توجه به این توضیحات و با استفاده از آمار موجود به تشکیل جدول عمر خلاصه و جدول عمر کامل مردان شهر تهران در سال ۱۳۷۰ می‌پردازیم.

۳- داده‌ها و برآوردهای مقدماتی

به منظور استفاده از آمارهای حیاتی جمعیت جاری برای تشکیل جدول عمر و برآورد تابع بقاء از اطلاعات سرشماری سال ۱۳۷۰ مردان شهر تهران و تعداد مردگان ثبت شده در گروههای سنّی مجزا طی سالهای ۱۳۶۹ تا ۱۳۷۱ بهره گرفته‌ایم.

این اطلاعات که به صورت گروه‌بندی شده برحسب سن در نتایج سرشماری وجود دارند، در ستون ${}_nk_x$ جدول ۳-۱ درج شده‌اند. نماد ${}_nk_x$ تعداد جمعیت پایه در گروه سنی

[x,x+n) را در آبان سال ۱۳۷۰ نشان می‌دهد. اطلاعات مربوط به تعداد مرگ از آمارهای بهشت‌زهرا و سازمان ثبت احوال استخراج شده و برای هر گروه سنّی [x,x+n) و برای سه سال متوالی ۱۳۶۹ تا ۱۳۷۰ در ستونهای $_nD_x$ از جدول ۳-۱ درج شده‌اند که از متوسط آنها برای محاسبهٔ احتمال مرگ استفاده شده است.

جدول ۳-۱ آمارهای حیاتی جمعیت مردان شهر تهران (۷۱-۱۳۶۹)

سال	(۶۹)	(۷۰)	(۷۱)	(۷۰)	
گروه‌سنی [x,x+n)	$_nD_x$	$_nD_x$	$_nD_x$	$_nk_x$	$_nM_x*10^{-3}$
۰-۱	۱۴۵۸	۱۸۲۸	۱۶۶۰	۶۱۷۴۸	۲۶/۷۹۷
۱-۵	۳۲۰	۳۶۷	۴۲۷	۲۹۱۰۶۸	۱/۲۷۵۷۷
۵-۱۰	۲۹۷	۳۰۸	۳۶۸	۴۵۵۷۴۴	۰/۷۱۱۶۶
۱۰-۱۵	۲۱۳	۲۶۹	۲۸۴	۳۸۸۸۳۳	۰/۶۵۶۶۶
۱۵-۲۰	۷۲۵	۶۲۰	۷۵۰	۳۰۳۷۴۴	۲/۲۳
۲۰-۲۵	۸۹۴	۸۲۵	۸۶۳	۳۱۷۴۷۸	۲/۷۱۱
۲۵-۳۰	۵۹۷	۷۵۰	۶۶۸	۲۹۶۴۳۹	۲/۲۶۵۸
۳۰-۳۵	۷۴۵	۵۹۳	۶۵۰	۲۵۸۶۶۹	۲/۵۶۱۸
۳۵-۴۰	۷۹۰	۷۶۴	۸۵۰	۲۲۰۸۲۸	۳/۶۲۸۸
۴۰-۴۵	۸۲۰	۹۲۳	۱۰۸۰	۱۶۵۹۸۰	۵/۶۷
۴۵-۵۰	۱۰۲۱	۱۰۹۰	۱۱۸۰	۱۲۹۶۲۳	۸/۴۶۳
۵۰-۵۵	۱۵۱۳	۱۷۴۰	۱۶۱۰	۱۱۸۴۴۰	۱۳/۶۸۶
۵۵-۶۰	۲۳۰۶	۱۹۱۰	۲۰۰۶	۱۰۷۰۲۲	۱۹/۳۸
۶۰-۶۵	۲۴۰۰	۲۳۷۰	۲۵۶۰	۸۵۶۲۷	۲۸/۵۳۴۶
۶۵-۷۰	۳۰۱۰	۲۸۰۳	۲۷۸۰	۶۳۶۸۲	۴۴/۹۷۸۶
۷۰-۷۵	۲۳۱۸	۲۱۵۶	۲۱۰۰	۳۳۴۹۲	۶۵/۴۲۸۵
۷۵-۸۰	۱۴۲۰	۱۲۴۶	۱۳۱۰	۱۴۲۵۷	۹۲/۹۶
۸۰-۸۵	۸۹۴	۱۱۸۰	۹۸۵	۷۶۸۳	۱۳۲/۵۴۴
۸۵+	۳۰۵۲	۲۹۶۰	۳۲۰۰	۱۴۲۲۸	۲۸۲/۸

نکته: حتماً توجه دارید که (۸۵=) ω' آخرین سن ثبت شده برای اطلاعات جمعیتی است. اما نکته قابل توجه اینکه سن ω' به مراتب کوچکتر از ω (که سن واقعی مشاهده در جمعیت است) می‌باشد، از اینرو مقادیر بدست آمده L_{∞} و T_x خیلی قابل اطمینان نیستند و نتیجه دیگر اینکه تمام ستون e^0_x نیز کمی انحراف خواهد داشت.

برآوردهای مقدماتی که به روش ناپارامتری انجام می‌شوند، اساساً مبتنی بر توزیع دوجمله‌ای در هر گروه سنی هستند، که در آن احتمال مرگ برابر است با نسبت مشاهده شدهٔ مرگ در بین افراد آن گروه سنّی. امّا به خاطر آنکه مرگها در طول بازهٔ سنّی رخ می‌دهند، برخی تصحیح‌ها ضرورت می‌یابند. به طور خلاصه جدول ۳-۲ فرمولهای محاسباتی را برای تشکیل جدول عمر ارائه می‌کند. نتایج اینگونه محاسبات در جدول ۲-۱ درج شده‌اند.

جدول ۳-۲ فرمولهای محاسبه تابعهای جدول عمر

$${}_nM_x=\frac{{}_nD_x}{{}_nK_x} \qquad x=0,1,5,10,\ldots 85\ ;$$

برای

$${}_nq_x \div \frac{{}_nM_x}{1/n\ [1+n\ (1-{}_nf_x)\ {}_nM_x]} \qquad x=0,1,5,\ldots 80;\ {}_{\infty}q_{85}=1$$

در حالت خاص $_nf_x=\frac{1}{2}$

$${}_nq_x \div \frac{{}_nM_x}{1/n\ [1+{}_nM_x / 2]}$$

اکنون با در نظر ۱۰۰۰۰= l_0 که ریشه جدول عمر است، مقادیر زیر را محاسبه می‌نماییم:

$$l_{x+n} = l_x(1-{}_nq_x); \qquad x=0,1,5,10,\ldots 80\ ;$$

$${}_nd_x = l_x - l_{x+n} = l_x \cdot {}_nq_x\ ; \qquad x=0,1,5,10,\ldots 80\ ,\quad {}_{\infty}d_{85}={}_{\infty}l_{85}$$

$${}_nl_x = n[l_x - (1-{}_nf_x)\ {}_nd_x]; \qquad x=0,1,5,10,\ldots 80\ ;$$

و

$${}_{\infty}L_{85} = \frac{{}_{\infty}d_{85}}{{}_{\infty}M_{85}} = \frac{{}_{\infty}L_{85}}{{}_{\infty}M_{85}};$$

$$T_x = {}_nL_x+{}_nL_{x+n}+\ldots+{}_{\infty}L_{85}\ ; \qquad x=0,1,5,10,\ldots 85\ ;$$

$$e^0_x=\frac{T_x}{l_x}\ ; \qquad x=0,1,5,10,\ldots 85\ ;$$

و بعلاوه

$${}_na_x \approx n \cdot {}_nf_x\ ; \qquad x=0,1,5,10,\ldots 85\ ;$$

و $_{\infty}a_{85}=e^{0}_{85}$;

۴- ساختن جدول عمر با استفاده از توزیعهای بقاء

اگر طول عمر هر فرد را با متغیر تصادفی X نشان دهیم، تابع توزیع احتمال و تابع بقای آن به صورت زیر تعریف می‌شوند:

تابع توزیع: $F(x)= Pr(X\leq x)\ ,\ x>0$

تابع بقاء $S(x)=Pr(X>x)= 1-F(x),\ x>0$

در بیمه‌های عمر با طول عمر آتی شخص x ساله سرو کار داریم. این متغیر را با T(x) یا به‌طور ساده با T نمایش می‌دهیم. روشن است T+x=X. که توزیع طول عمر آتی شخص x ساله، توزیعی شرطی است که از روی توزیع X به شرط آنکه فرد تا x سالگی زنده مانده باشد، بدست می‌آید. رابطهٔ تابع توزیع T با تابع توزیع و تابع بقای X چنین است. به‌ازای هر t>0,

$$G(t)= Pr(T\leq t)= Pr(T+x\leq t+x)= Pr[X\leq t+x|X>x]=$$

$$\frac{F(x+t)-F(x)}{1-F(x)} = \frac{S(x)-S(x+t)}{S(x)} = 1-\frac{S(x+t)}{S(x)}$$

مشتق این تابع را نسبت به t تابع چگالی احتمال عمر آتی شخص x ساله، گویند. مفهوم دیگر که در بیمه نقش اساسی دارد، مفهوم نیروی آنی مرگ[1] است که به معنای احتمال شرطی مردن شخص x ساله در بازه بینهایت کوچک $(t,t+\Delta t)$ است.

نیروی آنی مرگ شخص x ساله را در سن x+t به صورت زیر تعریف می‌کنیم

$$\mu_{x+t}= \frac{g(t)}{1-G(t)} = -\frac{d}{dt} Ln[1-G(t)]$$

تابع تجمعی نیروی آنی مرگ نیز که ابزار مناسبی برای شناسایی تابع بقاء است، عبارت است از:

$$\lambda(x+t)= \int_0^t \mu_{x+y}\,dy = -\ln S(x+t)$$

توزیع گامپرتز:[2]

یکی از مدلهای معروف برای توزیع طول عمر است که به خاطر دارا بودن دو پارامتر

1- Force of Mortality

2- Gomprertz

از انعطاف زیادی برخوردار است. این توزیع دارای چگالی زیر است:

$$f(x)= Re^{a} \exp\{ \frac{R}{a} (1-e^{ax}) \} , x\geq 0$$

که تابع بقای آن عبارت است از

$$S(x) = \exp\{ \frac{R}{a} (1-e^{ax}) \}$$

نیروی آنی مرگ آن $\mu_{x+t}=R \exp(x) = \{ a (x+t) \}$ است که با تعریف $R=B$ و $e^a=C$، صورت آشنای $\mu_{x+t}=BC^{x+t}$ به دست می‌آید. این رابطه معرف یک خط در مقیاس لگاریتمی است، $\ln\mu_{x+t} = \ln R+a (x+t)$.

توزیع بقای تکه‌ای:[1]

در مواردی بکار می‌رود که نتوان یک تابع را به کل بازه‌های عمر برازاند. در این صورت برای بازه‌های مختلف از توزیعهای مختلف استفاده می‌شود. بنابراین تابع بقای تکه‌ای بر روی k دورهٔ متوالی با k ضابطه تعریف می‌شود که هر کدام یک تابع بقای شرطی است. مثلاً، در دورهٔ iام $S_i(x)$ را خواهیم داشت که نوعی توزیع بقاء است.

توزیع وایبول:[2]

یکی دیگر از توزیعهای مهم طول عمر، توزیع وایبول است.

$$f(x) = \frac{c}{Q} x^{c-1} \exp[\frac{-x^{c}}{Q}], x,c,Q>0$$

$$S(x) = \exp(\frac{-x^{c}}{Q}) \text{ و } \mu_{x+t} = \frac{c}{Q} x^{c-1}$$

ملاحظه می‌شود که نیروی آنی مرگ در این توزیع نیز در مقیاس لگاریتمی خطی راست است.

برازاندن یک یا چند توزیع به آمارهای بدست آمده مستلزم بررسیهای مقدماتی برای انتخاب یک یا چند مدل مشخص آماری است. با رسم مقادیر تجربی نیروی آنی مرگ برحسب سن در مقیاسهای مختلف، می‌توان مدل مناسب را تشخیص داد.

در بررسیهای زیر، از داده‌های جدول ۲-۱ استفاده شده است.

1- Piecewise Survival Function 2- Weibull

در شکلهای ۴-۱ تا ۴-۴ نیروی آنی مرگ تجربی را برای توزیعهای وایبول و گامپرتز رسم کرده‌ایم که نشان می‌دهند پس از سن تقریباً ۳۳ سالگی صورت خطی دارند و توزیع گامپرتز مناسبتر از توزیع وایبول است.

اکنون که مدل مناسب را تشخیص داده‌ایم، وقت آن است که پارامترهای آن را برآورد کنیم. این برآوردها برای سنین پس از ۳۳ سالگی به کمک روشهای آماری رگرسیونی و بیشینهٔ درست‌نمایی محاسبه شده‌اند. در نتایج جدول‌های ۴-۱ و ۴-۲ درج شده‌اند. این نتایج حاکی از آن هستند که توزیع گامپرتز بطور نسبی بهتر است ولی باز هم برازش قابل قبول برای کل بازهٔ ۳۳ سال به بالا را ندارد. برای اصلاح این نقص، با توجه به شکلهای ۵-۱ و ۵-۲، بازهٔ ۶۴ سال به بالا را جداگانه بررسی می‌کنیم.

نتایج این بررسی در جدولهای ۴-۳ و ۴-۴ درج شده‌اند. ملاحظه می‌شود. که با کارگرفتن توزیعهای جداگانه‌ای برای بازه‌های ۳۳ تا ۶۴ سالگی و از ۶۴ سال به بالا، بهبود فوق‌العاده‌ای در برازشها حاصل می‌شود. با این کار آمارهٔ نقص برازش $(X)^2$ در هر دو بازهٔ سنی کاهش زیاد می‌یابد. علاوه بر آن روش برآورد رگرسیونی مؤثرتر به نظر می‌رسد، زیرا مقدار X^2ی آن کوچکتر است، امّا روش بیشینهٔ درستنمایی به دلایل نظری برتر است.

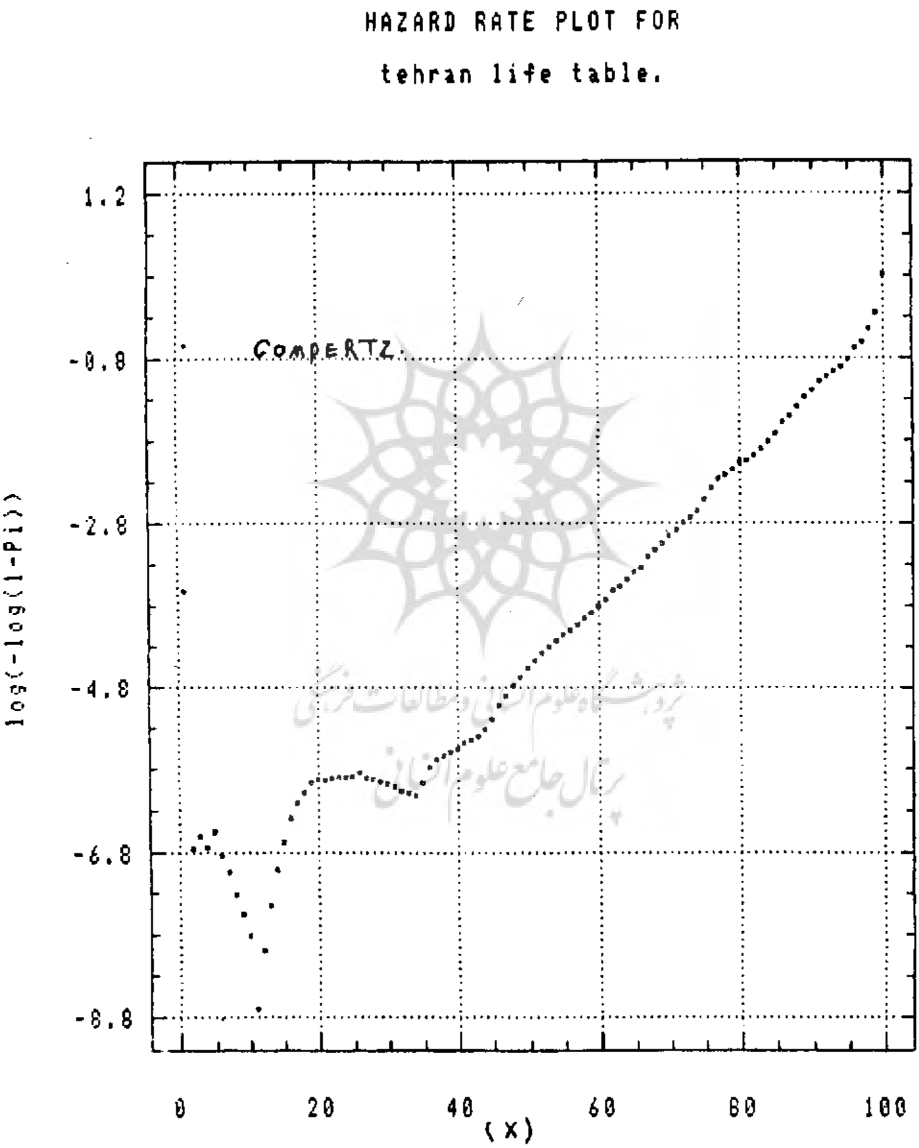
پس صورت کلی بقاد در بازهٔ ۳۳ سال به بالا عبارت است از

$$S(x)=\{S_1(x)=\exp\{74*10^{-5}(1-e^{0.0965x}) \qquad 33\leq x<64 \qquad \text{و}$$

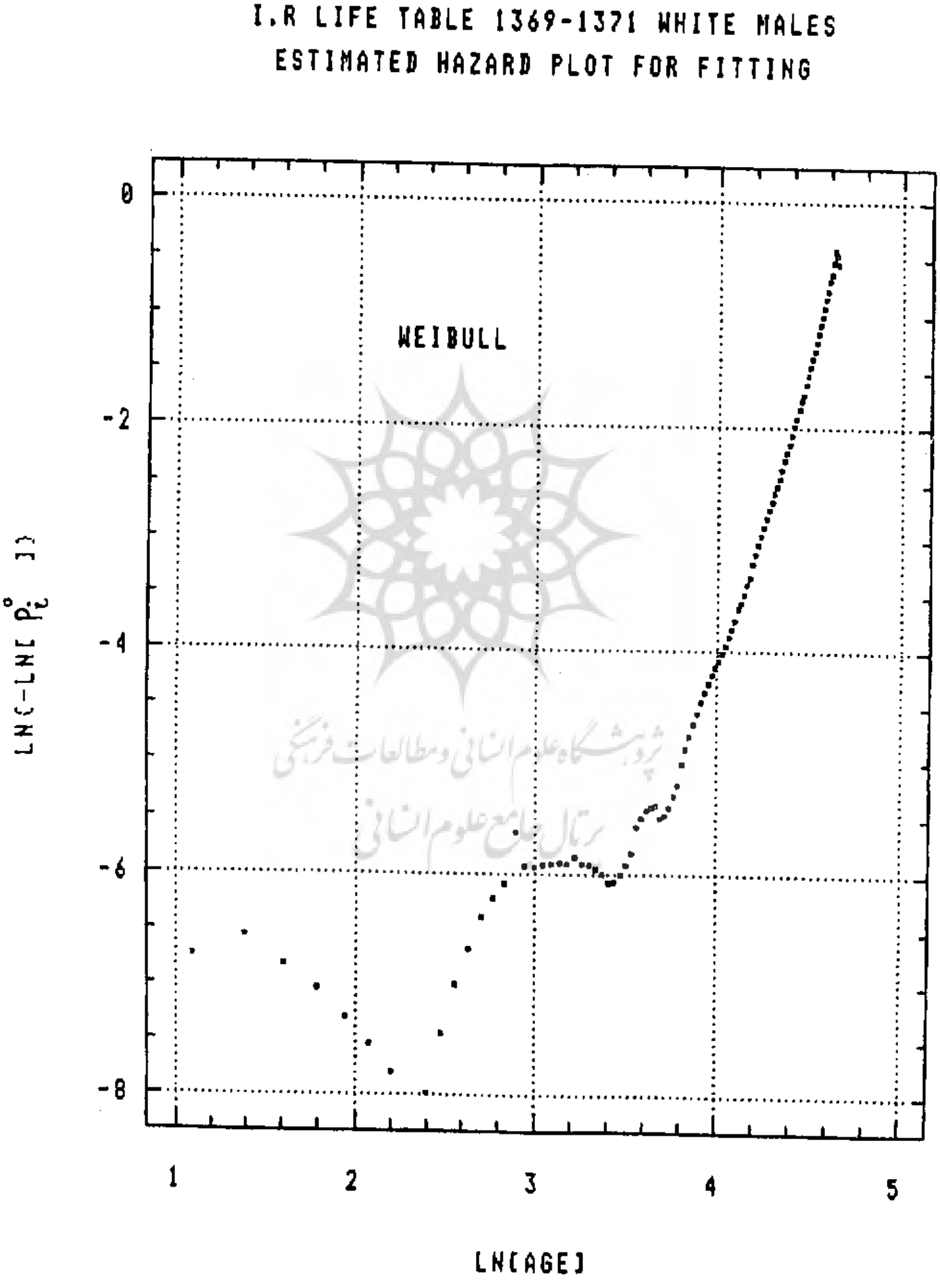
$$S(x)=\{S_2(x)=\exp\{203*10^{-5}(1-e^{0.07905x}) \qquad 64\leq x \qquad \text{و}$$

اکنون برای تکمیل کار، لازم است که تابع بقا را برای سنین زیر ۳۳ سال به دست آوریم. اگر به شکلهای ۴-۱ و ۴-۲ دقت کنیم ملاحظه می‌شود

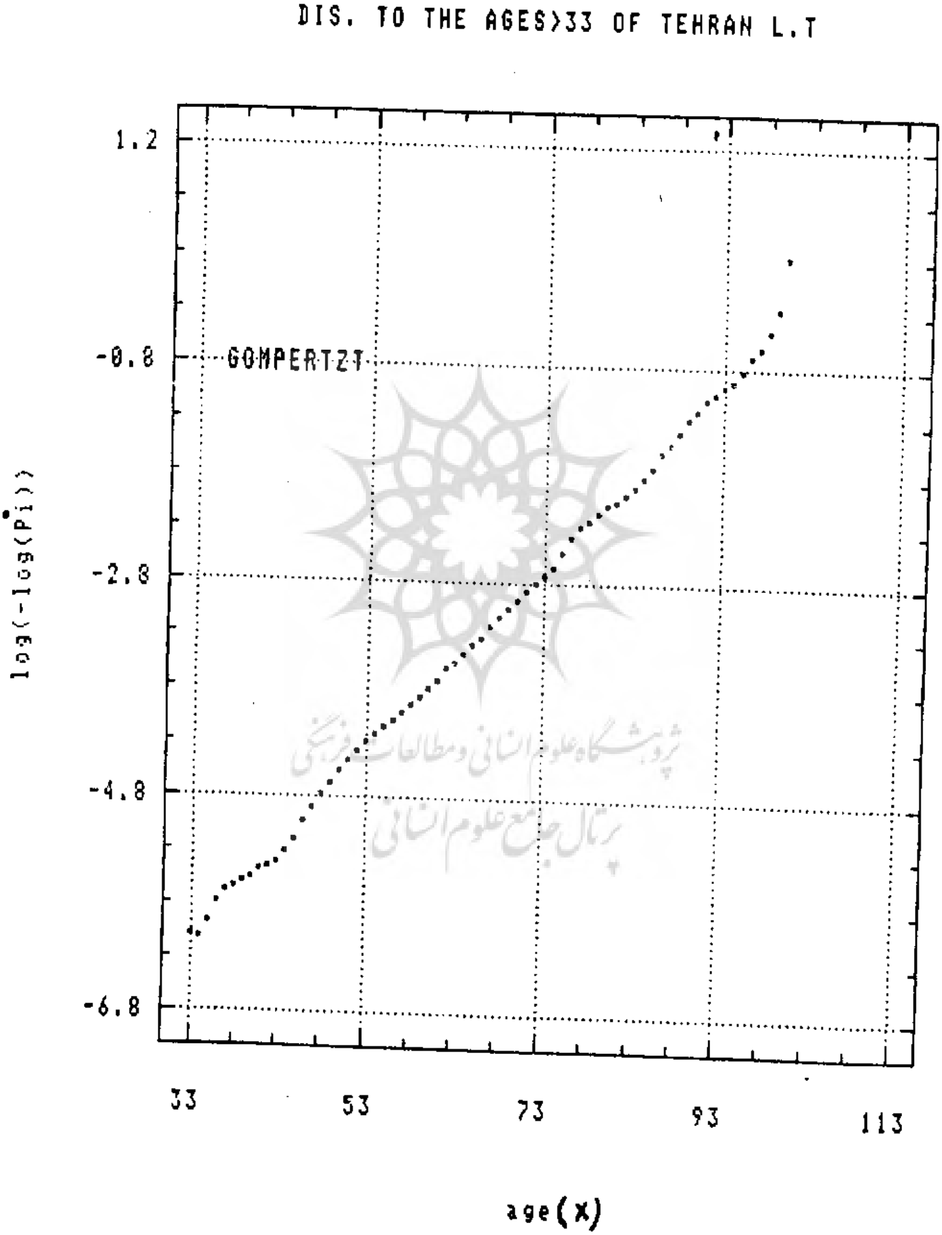
شکل ۴-۱ نمودار تابع نیروی آنی مرگ جهت برازش تابع توزیع گامپرتز بر جدول عمر مردان تهران (۱۳۷۱_۱۳۶۹)



شکل ۴-۲ نمودار تابع نیروی آنی مرگ جهت برازش تابع توزیع وایبول بر جدول عمر مردان تهران (۱۳۶۹_۱۳۷۱)

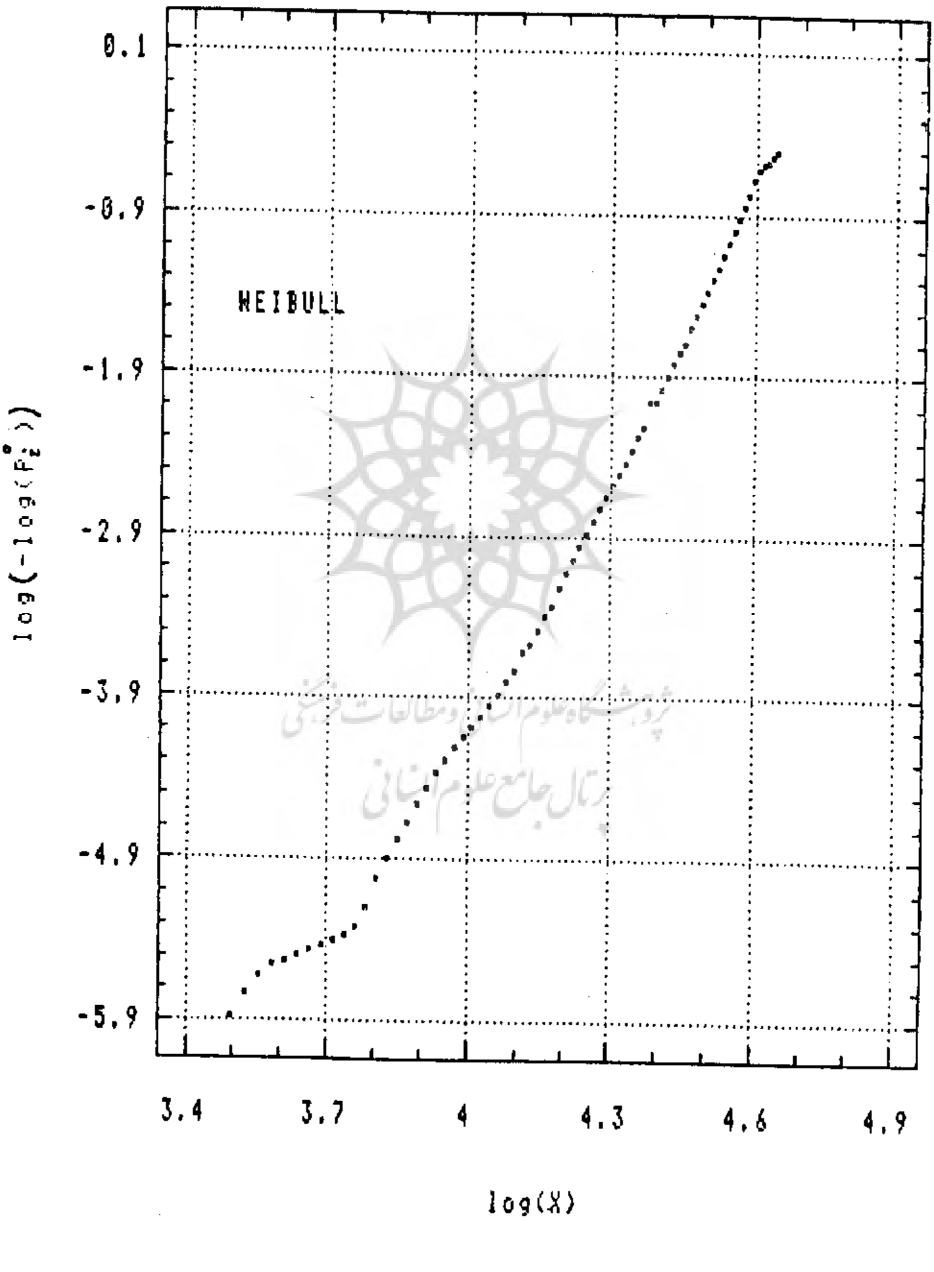


شکل ۴-۳نمودار تابع نیروی آنی مرگ برای سنین پس از ۳۲سال جدول عمر مردان تهران (۱۳۷۱_۱۳۶۹)



شکل ۴-۴نمودار تابع نیروی آنی مرگ برای سنین پس از ۳۳سال جدول عمر مردان تهران

(۱۳۶۹_۱۳۷۱)



جدول ۴-۱) پارامترهای برآورد شده توزیع گامپرتز و مقدار آماره مرتبط

پارامترها / روش برآورد	a	R	X^2	p-value
رگرسیونی	۰/۰۸۸۶	۰/۰۰۰۰۹۹۱۴	۱۰۲/۶	۰/۰۱۷۴
بیشینه درستنمایی (MLE)	۰/۰۷۱۸	۰/۰۰۰۱۶۲۴	۱۲۱/۳	۰/۰۰۲۳

جدول ۴-۲) پارامترهای برآورد شده توزیع وایبول و مقدار آماره مرتبط

پارامترها / روش برآورد	Q	C	X^2	p-value
رگرسیونی	۷۶/۶۳	۵/۹۹۶	۱۷۳/۴	۰/۰۰۰۰۹
بیشینه درستنمایی (MLE)	۷۷/۰۵	۶/۰۹۲	۱۳۷/۶	۰/۰۰۱۰۵

جدول ۴-۳) پارامترهای برآورد شده توزیع گامپرتز- برای سنین ۳۲ تا ۶۴ سال

پارامترها / روش برآورد	a	R	X^2	p-value
رگرسیونی	۰/۰۹۶۵	۰/۰۰۰۰۷۱۳	۳۰/۷۵	۰/۴۲
بیشینه درستنمایی (MLE)	۰/۰۹۳۱	۰/۰۰۰۰۹۲۶	۴۱/۲	۰/۰۱۲

جدول ۴-۳) پارامترهای برآورد شده توزیع گامپرتز- برای سنین بعد از ۶۴ سال

پارامترها / روش برآورد	a	R	x^2	p-value
رگرسیونی	۰/۰۷۹۰۵	۰/۰۰۰۱۰۶۲۶	۲۷/۱۵	۰/۵۶
بیشینه‌درستنمایی (MLE)	۰/۰۷۷۰۵	۰/۰۰۰۲۰۳	۳۷/۱	۰/۱۷

که احتمالات شرطی مرگ برای سنین کمتر از ۳۳ سالگی از روند یکنواختی پیروی نمی‌کند. همانگونه که مشهود است منحنی در این فاصله دارای یک نقطه کمینه موضعی درحول سن ۱۴ سالگی و یک نقطه بیشینه به صورت یک کوهان در حول سن ۲۵ سالگی است، در تفسیر منحنی برای سنین کمتر از ۳۳ سالگی می‌توان چنین گفت که:

در ابتدای تولد به دلیل خطرپذیری بالا و بخصوص در ۳ روز اول زندگی، احتمال مرگ بسیار بالا است که در غالب جداول عمر استاندارد، توابع پایه‌ای جداول عمر برای سال اول زندگی برای دوره‌های روزانه ۱-۰، ۷-۱ و ۲۸-۷ و ۳۶۵-۲۸ روزگی بطور مجزا ارائه می‌گردند.

پس از گذشت سال اول، به تدریج بر دوام و قوام کودک افزوده می‌گردد و شاهد سیر نزولی منحنی هستیم، این سیر نزولی تا سن ۱۴ سالگی ادامه دارد، پس از این سن به دلیل ورود به دوران جوانی و بلوغ به تدریج به علت خطرات ناشی از حوادث مختلف بخصوص در مورد پسران احتمالات شرطی مرگ روندی افزایشی می‌یابد و نقطه اوج این روند در حدود سن ۲۵ سالگی است. پس از این سن، و به اصطلاح خروج از دوران پرمخاطره جوانی باز هم احتمالات شرطی مرگ سیر نزولی می‌یابد و این امر تا حدود سن ۳۲ سالگی برای جمعیت مردان تهران مشهود است. پس از این سن است که نوسانات ناشی از دوره‌های نوجوانی و جوانی، از میان رفته و احتمالات مرگ‌ومیر شرطی با افزایش سن، روندی یکنواخت و افزایشی می‌یابد.

در بخشهای قبل، در مورد تعیین تابع بقاء پارامتری که قابلیت برازش بر سنین بعد

از ۳۲ سالگی را داشته باشد، به تفصیل سخن گفتیم و این توابع را نیز برآورد نمودیم. ولی در مورد سن کمتر از ۳۳ سال و تعیین مدل ریاضی بعنوان بقاء برای این سنین، با مشکل مواجهیم، زیرا در یک دوره ۳۲ ساله از طول عمر، چندین صعود و نزول در منحنی مشاهده می‌گردد.

یکی از راهها برای تعیین فرم تحلیلی تابع بقاء که قابلیت برازش بر این داده‌ها را داشته باشد، بهره‌جویی از روش چندجمله‌ایهای متعامد است. (استفاده از روش برازش چندجمله‌ایهای متعامد، می‌تواند جهت هموارسازی داده‌ها و همچنین جهت درون‌یابی، نیز جدولها مفید واقع شود).

در ادامه، از روش چندجمله‌ایهای متعامد بهره جسته، و شکل تحلیلی تابع بقاء را برای سنین کمتر از ۳۳ سالگی به دست می‌آوریم.

نکته: از آنجا که احتمال مرگ در سال اول زندگی با سایر سالها تفاوت چشمگیری دارد، لذا احتمال بقاء در سال اول زندگی بطور مجزا در صورت تحلیلی تابع بقاء تکه‌ای وارد می‌شود و از این مقدار در محاسبات مربوط به روش چندجمله‌ای متعامد، استفاده نمی‌کنیم.

- روش چندجمله‌ایهای متعامد

چنانچه بتوان رابطه ریاضی مناسبی میان مقادیر y و سنین ۱ تا ۳۲ سالگی به شکل زیر یافت:

$$y = L_n(-L_n S^0(x)] = \beta_0+\beta_1 x^1+\beta_2 x^2+...+\beta_k x^k \qquad (۱-۴)$$

با استفاده از تبدیلات معکوس، فرم تحلیلی تابع بقاء را می‌توان به دست آورد که عبارت خواهد بود از:

$$S(x) = \exp[-\exp(\beta_0+\beta_1 x^1+\beta_2 x^2+...+\beta_k x^k)] \qquad (۲-۴)$$

برای حل رابطه (۴-۱) که رگرسیونی غیرخطی (منحنی) است، از روش چندجمله‌ایهای متعامد استفاده می‌نماییم و مدل بهینه را با کمترین جملات و بیشترین کارایی به دست می‌آوریم.

مدل به صورت زیر است:

$$y=\alpha_0+\alpha_1 p_1(x)+\alpha_2 p_2(x)+\alpha_3 p_3(x)+\alpha_4 p_4(x)+\alpha_5 p_5(x)+\xi. \qquad (۴-۳)$$

جهت یافتن مدل بهینه از ضرایب چندجمله‌ای برای n=32 نقطه استفاده می‌نماییم و محاسبات را انجام می‌دهیم که خلاصه کار در جدولهای (۴-۵) و (۴-۶) ارائه گردیده است.

جدول ۴-۵) ضرائب چندجمله‌ایهای متعامد (محاسبه شده با n=32 نقطه)

	$p(x_i)$	$p_2(x_i)$	$p_3(x_i)$	$p_4(x_i)$	$p_5(x_i)$
$\sum_{j=1}^{320} p_i^2(x_i)$	۲/۹۹۲	۱۹۴۷۷۹۲	۴۱۷۳۸۴	۳۴۸۳۲۰۱۳۶	۱۵۴۷۱۲۸۶۵۶
$\sum_{j=1}^{320} p_i^2(x_i)y_i$	-۷۸	۱۸۱۵	-۶۳	۱۰۳۵۰	-۲۲۲۳۵
α_i	-۰/۰۲۶۰۷	۰/۰۰۰۹۳۱۸	-۰/۰۰۰۱۵۱	۰/۰۰۰۰۲۹۷۱	-۰/۰۰۰۰۱۴۳۷۲
λ_i	۱	۳	$\frac{۱}{۶}$	$\frac{۷}{۱۲}$	$\frac{۳}{۲۰}$

جدول ۴-۶) جدول آنالیز واریانس برای مدل رگرسیونی

منبع تغییرات	درجه‌آزادی	مجموع توان دوم	میانگین انحرافات(MSE)	F
$\sum_{j=1}^{32}(y_i-\bar{y})2$	۳۲	۴/۰۵		
مدل‌خطی (α_1)	۱	۲/۰۳۳		
باقیمانده		۲/۰۱۸	۰/۰۶۳۰۶	۳۲/۲۲۹
درجه ۲ (α_2)	۱	۱/۶۹۱۲		
باقیمانده	۳۱	۰/۳۲۶۷۴	۰/۰۱۰۵۴	۱۶۰/۴۵
درجه ۳ (α_3)	۱	۰/۳۰۷۵۳		
باقیمانده	۳۰	۰/۰۱۹۲۱	۰/۰۰۰۶۴	۴۸۰/۵
درجه ۴ (α_4)	۱	۰/۰۰۹۷		
باقیمانده	۲۹	۰/۰۰۹۵۱	۰/۰۰۰۳۲۸	۰/۰۵

مقادیر F برای جملات خطی، توان دوم و توان سوم به اندازه کافی بزرگ است، لذا در

آزمون فرض

$$\begin{cases} H_0: \alpha_i = 0 \\ H_0: \alpha_i \neq 0 \end{cases} \qquad i=1,2,3$$

آزمون در سطح ٪۵ معنی‌دار است و به عبارتی این جملات وارد مدل می‌شوند.

و مدل کلی به صورت زیر خواهد شد:

$$Y = -3/092 - 0/02607p_1(x) + 0/0009318p_2(x) + 0/0000297p_3(x)$$

مدل فوق برای متغیرهای متعامد است، چنانچه بخواهیم مدل را برحسب جملات متغیر اصلی (سن) نمایش دهیم، از روابط موجود بین ξ_iها با متغیرهای اصلی بهره خواهیم گرفت:

$$p_i(x)=\lambda_i \xi_i$$

که با استفاده از λ_i های موجود در سطر آخر جدول (۴-۵) به دست خواهیم آورد:

$$Y = -3/092 - 0/02607\xi_1 + 0/0027954\xi_2 + 0/000017331\xi_3$$

حال با بهره‌جویی از معادلات عمومی که اتصال میان ξ_i ها X (متغیر سن) را نشان می‌دهد خواهیم داشت:

$$\xi_1 = X - \bar{X} = x$$

$$\xi_2 = x^2 - \frac{n^2-1}{12}$$

$$\xi_3 = x^3 - \left(\frac{3n^2-7}{20}\right) . x$$

که با قرار دادن n=32 در این معادلات خواهیم داشت:

$$Y = -3/2363 - 0.02607x - 0/001234x^2 + 0/000007331x^3$$

که در آن $x = X - \bar{X}$ است، لذا فرم کلی تابع بقاء با جایگذاری این معادله در رابطه (۴-۲) به صورت زیر خواهد شد،

$$S1(x) = \exp[-\exp(-3/2363 - 0/02607x^* - 0/001234x^{*2} + 0/000007331x^{*3})$$

که در آن $(x^* = x - 17)$

صورت کلی تابع بقاء پارامتری

از آنچه در این بخش آورده شد، نتیجه می‌شود که تابع بقاء ما بصورت «تکه‌ای» زیر است:

$$S_x(x)\begin{cases} S(1) = 0/97356 & 0\leq x<1 \\ 0/933\exp\{ - \exp[- 3/2363 - 0/02607\ (x-17) - 0/001224\ (x-17)^2 + & \\ \qquad 0/000007332\ (x-17)\ \ \} & 1\leq x<33 \\ 0/93535\ \exp\ \{0/0007389\ (1-e^{0/0965x}) & 33\leq x<64 \\ 0/8991\ \exp\ \{0/00202732\ (1-e^{0/07905x}) & 64\leq x \end{cases}$$

سرانجام، با استفاده از این تابع بقاء می‌توانیم احتمال q_x، مرگ را به ازای $x=0$ و $t=1$ تا $t=105$ حساب کنیم. نتیجه این محاسبه همان جدول عمر کامل مردان شهر تهران است که در جدول پیوست درج شده است. در فرمول بالا $(x-17)^2$ و $(x-17)^3$ باید باشد

جدول پیوست ـ جدول عمر برای مردان شهر تهران (۱۳۷۱-۱۳۶۹)

(۱) $x+t\mathrm{l}x$	(۲) $_tq_x$	(۳) l_x	(۴) $_td_x$	(۵) $_tL_x$	(۶) T_x	(۷) e^0_x
۰-۱	۰/۰۲۶۴۴	۱۰۰۰۰۰	۲۶۴۴	۹۷۷۱۳	۶۵۳۱۹۲۴	۶۵/۳۲
۱-۲	۰/۰۰۱۳۵	۹۷۳۵۶	۱۳۱	۹۷۲۹۹	۶۴۳۴۲۱۱	۶۶/۰۹
۲-۳	۰/۰۰۱۱۹	۹۷۲۵۵	۱۱۳	۹۷۱۷۸	۶۳۳۶۹۱۲	۶۵/۰۹
۳-۴	۰/۰۰۱۱۷	۹۷۱۱۲	۱۱۵	۹۷۰۵۵	۶۲۳۹۷۳۴	۶۴/۲۵
۴-۵	۰/۰۰۱۴۱	۹۶۹۹۷	۱۳۸	۹۶۹۲۸	۶۱۴۲۶۷۹	۶۳/۳
۵-۶	۰/۰۰۱۰۸	۹۶۸۵۹	۱۰۴	۹۶۸۰۷	۶۰۴۵۷۵۱	۶۲/۴۲
۶-۷	۰/۰۰۸۸	۹۶۷۵۵	۸۵	۹۶۷۱۳	۵۹۴۸۹۴۴	۶۱/۴۸
۷-۸	۰۳۰۰۰۶۷	۹۶۶۷۰	۶۵	۹۶۶۳۷	۵۸۵۲۲۳۱	۶۰/۵۴
۸-۹	۰/۰۰۰۵۳	۹۶۶۰۵	۵۱	۹۶۵۸۰	۵۷۵۵۵۹۴	۵۹/۵۸
۹-۱۰	۰/۰۰۰۴۱	۹۶۵۵۴	۳۹	۹۶۵۱۴	۵۶۵۹۰۱۴	۵۸۳۶۱
۱۰-۱۱	۰/۰۰۰۱۷	۹۶۵۱۵	۱۶	۹۶۵۰۷	۵۵۶۲۵۰۰	۵۷/۶۳
۱۱-۱۲	۰/۰۰۰۳۴۱	۹۶۴۹۹	۳۳	۹۶۴۸۳	۵۴۶۵۹۹۳	۵۶/۶۴
۱۲-۱۳	۰/۰۰۰۵۹	۹۶۴۶۶	۵۷	۹۶۴۳۷	۵۳۶۹۵۱۰	۵۵/۶۶
۱۳-۱۴	۰/۰۰۰۹۲	۹۶۴۰۹	۸۸	۹۶۳۶۵	۵۲۷۳۰۷۳	۵۴/۶۹
۱۴-۱۵	۰/۰۰۱۲۷	۹۶۳۲۱	۱۲۲	۹۶۲۶۰	۵۱۷۶۷۰۸	۵۳/۷۴
۱۵-۱۶	۰/۰۰۱۶۸	۹۶۱۹۹	۱۶۳	۹۶۱۱۸	۵۰۸۰۴۴۸	۵۲/۸۱
۱۶-۱۷	۰/۰۰۲۰۱	۹۶۰۳۷	۱۹۳	۹۵۹۴۰	۴۹۸۴۳۳۰	۵۱/۹
۱۷-۱۸	۰/۰۰۲۲۸	۹۵۸۴۴	۲۱۹	۹۵۷۳۴	۴۸۸۸۳۹۰	۵۱/۰۰
۱۸-۱۹	۰/۰۰۲۵۶	۹۵۶۲۵	۳۴۰	۹۵۴۵۵	۴۷۹۲۶۵۶	۵۰/۱۲
۱۹-۲۰	۰/۰۰۲۶۶	۹۵۳۸۵	۲۵۴	۹۵۲۸۵	۴۶۹۷۲۰۱	۴۹/۲۴
۲۰-۲۱	۰/۰۰۲۶۴	۹۵۱۳۱	۲۵۱	۹۵۰۰۵	۴۶۰۱۹۴۳	۴۸/۳۷

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)
$x+t \mid x$	${}_tq_x$	l_x	${}_td_x$	${}_tL_x$	T_x	e^0_x
۲۱-۲۲	۰/۰۰۲۷۰	۹۴۸۸۰	۲۵۶	۹۴۷۵۲	۴۵۰۶۹۳۸	۴۷/۵۰
۲۲-۲۳	۰/۰۰۲۷۳	۹۴۶۲۴	۲۵۸	۹۴۴۹۵	۴۴۱۲۱۸۶	۴۶/۶۳
۲۳-۲۴	۰/۰۰۲۷۵	۹۴۳۶۶	۲۵۹	۹۴۲۳۶	۴۳۱۷۴۳۴	۴۵/۷۵
۲۴-۲۵	۰/۰۰۲۷۸	۹۴۱۰۷	۲۵۷	۹۳۹۷۸	۴۲۲۳۱۹۸	۴۴/۸۸
۲۵-۲۶	۰/۰۰۲۸۸	۹۳۸۵۰	۲۶۹	۹۳۷۱۵	۴۱۲۹۲۲	۴۴/۰۰
۲۶-۲۷	۰/۰۰۲۷۱	۹۳۹۵۱	۲۵۴	۹۳۴۶۴	۴۰۳۵۵۰۵	۴۳/۱۲
۲۷-۲۸	۰/۰۰۲۶۷	۹۳۳۳۷	۲۴۹	۹۳۲۱۲	۳۹۴۲۰۴۱	۴۲/۲۳
۲۸-۲۹	۰/۰۰۲۶۰	۹۳۰۸۸	۲۴۲	۹۲۹۶۷	۳۸۴۸۸۲۹	۴۱/۳۵
۲۹-۳۰	۰/۰۰۲۵۳	۹۲۸۴۶	۲۳۵	۹۲۷۲۸	۳۷۵۵۸۶۲	۴۰/۴۵
۳۰-۳۱	۰/۰۰۲۴۶	۹۲۶۱۱	۲۲۸	۹۲۵۰۵	۳۶۳۱۳۴	۳۹/۵۵
۳۱-۳۲	۰/۰۰۲۳۲	۹۲۳۹۸	۲۱۴	۹۲۲۹۱	۳۵۷۰۶۲۹	۳۸/۶۴
۳۲-۳۳	۰/۰۰۲۲۷	۹۲۳۹۸	۲۱۰	۹۲۰۹۷	۳۴۷۸۳۳۸	۳۷/۷۳
۳۳-۳۴	۰/۰۰۲۲۱	۹۱۹۵۷	۲۰۳	۹۱۸۵۶	۳۳۸۶۲۵۹	۳۶/۸۲
۳۴-۳۵	۰/۰۰۳۱۲	۹۱۷۰۹	۲۸۶	۹۱۵۶۶	۳۲۹۴۴۰۳	۳۵/۹۲
۳۵-۳۶	۰/۰۰۳۴۲	۹۱۴۳۳	۳۱۳	۹۱۲۷۷	۳۲۰۲۸۳۷	۳۵/۰۳
۳۶-۳۷	۰/۰۰۳۵۸	۹۱۰۸۶	۳۲۶	۹۰۹۲۳	۳۱۱۱۵۶۰	۳۴/۱۶
۳۷-۳۸	۰/۰۰۳۷۶	۹۰۷۱۱	۳۴۱	۹۰۵۴۱	۳۰۲۰۶۳۷	۳۳/۳۰
۳۸-۳۹	۰/۰۰۳۸۳	۹۰۳۱۷	۳۴۶	۹۰۱۴۴	۲۹۰۳۰۰۹	۳۲/۴۴
۳۹-۴۰	۰/۰۰۳۹۵	۸۹۹۱۳	۳۵۵	۸۹۷۳۵	۲۸۳۹۹۵۳	۳۱/۵۸
۴۰-۴۱	۰/۰۰۴۰۸	۸۹۵۰۴	۳۶۵	۸۹۳۲۱	۲۷۵۰۲۱۷	۳۰/۷۳
۴۱-۴۲	۰/۰۰۴۲۱	۸۹۱۳۹	۳۷۵	۸۸۹۵۱	۲۶۶۰۸۹۶	۲۹/۸۵
۴۲-۴۳	۰/۰۰۴۴۷	۸۸۷۶۴	۳۹۷	۸۸۵۶۶	۲۵۷۱۹۴۵	۲۸/۹۷

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)
x+t⊔x	$_tq_x$	l_x	$_td_x$	$_tL_x$	T_x	e^0_x
۴۳-۴۴	۰/۰۰۴۹۲	۸۸۳۶۷	۴۳۵	۸۸۱۴۹	۲۴۸۳۳۷۹	۱۸/۱۲
۴۴-۴۵	۰/۰۰۵۵۴	۸۷۹۳۲	۴۷۸	۸۷۶۸۸	۲۳۹۵۲۳۰	۲۷/۲۴
۴۵-۴۶	۰/۰۰۶۵۹	۸۷۴۴۵	۵۷۶	۸۷۱۵۵	۲۳۰۷۵۴۲	۲۶/۳۹
۴۶-۴۷	۰/۰۰۷۴۵	۸۶۸۶۹	۶۴۷	۸۶۵۴۵	۲۲۲۰۳۷۸	۲۵/۵۶
۴۷-۴۸	۰/۰۰۸۳۸	۸۶۲۲۲	۷۲۳	۸۵۸۶۰	۲۱۳۳۸۴۲	۲۴/۷۵
۴۸-۴۹	۰/۰۰۹۳۵	۸۵۴۹۹	۷۹۹	۸۸۰۹۹	۲۰۴۷۹۸۲	۲۳/۹۵
۴۹-۵۰	/۰۱۰۴۰	۸۴۷۰۰	۸۸۰	۸۴۳۶۰	۱۹۶۲۸۸۳	۲۳/۱۷
۵۰-۵۱	۰/۰۱۱۵	۸۳۸۲۰	۹۶۴	۸۳۳۲۸	۱۸۷۸۵۲۳	۲۲/۴۱
۵۱-۵۲	۰/۰۱۲۵۵	۸۲۸۵۶	۱۰۴۰	۸۲۳۳۶	۱۷۹۵۱۸۵	۲۱/۶۷
۵۲-۵۳	۰/۰۱۳۵۹	۸۱۸۱۶	۱۱۱۲	۸۱۲۶۰	۱۷۱۲۸۴۹	۲۰/۹۳
۵۳-۵۴	۰/۰۱۴۶۶	۸۰۷۰۴	۱۱۸۳	۸۰۱۱۲	۱۶۳۱۵۸۹	۲۰/۲۲
۵۴-۵۵	۰/۰۱۵۷۲	۷۹۵۲۱	۱۲۵۰	۷۸۸۹۶	۱۵۵۱۴۷۷	۱۹/۵۱
۵۵-۵۶	۰/۰۱۶۶۲	۷۸۲۷۱	۱۳۰۱	۷۷۶۲۰	۱۴۷۲۵۸۱	۱۸/۸۱
۵۶-۵۷	۰/۰۱۷۷۹	۷۶۹۷۰	۱۳۶۹	۷۶۲۸۵	۱۳۹۴۹۶۱	۱۸/۱۲
۵۷-۵۸	۰/۰۱۹۰۷	۷۵۶۰۱	۱۴۴۲	۷۴۸۸۰	۱۳۱۸۶۷۶	۱۷/۴۴
۵۸-۵۹	۰/۰۲۰۴۸	۷۴۱۵۹	۱۵۱۹	۷۳۳۹۹	۱۲۴۳۷۹۶	۱۶/۷۷
۵۹-۶۰	۰/۰۲۲۰۷	۷۲۶۴۰	۱۶۰۳	۷۱۸۳۹	۱۱۷۰۳۹۷	۱۶/۱۱
۶۰-۶۱	۰/۰۲۳۷۵	۷۱۰۳۷	۱۶۸۷	۷۰۱۹۳	۱۰۹۸۵۵۸	۱۵/۴۶
۶۱-۶۲	۰/۰۲۶۷۳۰	۶۹۳۵۰	۱۷۸۲	۶۸۴۵۹	۱۰۲۸۳۶۵	۱۴/۸۳
۶۲-۶۳	۰/۰۲۷۹۶	۶۷۵۶۸	۱۸۸۹	۶۶۶۲۳	۹۵۹۹۰۶	۱۴/۱۹
۶۳-۶۴	۰/۰۳۰۳۹	۶۵۶۸۱	۱۹۹۶	۶۶۶۵۳	۸۹۳۲۸۳	۱۳/۶۰
۶۴-۶۵	۰/۰۳۳۱۳	۶۳۶۸۵	۲۱۱۰	۶۲۶۳۰	۸۲۶۶۳۰	۱۲/۹۸

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)
x+t تا x	${}_tq_x$	l_x	${}_td_x$	${}_tL_x$	T_x	e^0_x
۶۵-۶۶	۰/۰۳۵۱۴	۶۱۵۷۵	۲۲۴۰	۶۰۴۵۵	۷۶۴۰۰۰	۱۲/۴۱
۶۶-۶۷	۰/۰۳۹۶۴	۵۹۳۳۵	۲۳۵۲	۵۸۱۵۹	۷۰۳۵۴۵	۱۱/۸۶
۶۷-۶۸	۰/۰۴۳۱۰	۵۶۹۸۳	۲۴۵۵	۵۵۷۵۵	۶۴۵۳۸۶	۱۱/۳۳
۶۸-۶۹	۰/۰۴۶۷۵	۵۴۵۲۸	۲۵۵۰	۵۳۲۵۰	۵۸۹۶۳۱	۱۰/۸۱
۶۹-۷۰	۰/۰۵۰۶۴	۵۱۹۷۸	۲۶۳۲	۵۰۶۶۲	۵۳۶۳۸۱	۱۰/۳۲
۷۰-۷۱	۰/۰۵۴۸۴	۴۹۳۴۶	۲۷۰۶	۴۷۹۹۳	۴۸۵۷۱۹	۹/۸۴
۷۱-۷۲	۰/۰۵۹۲۱	۴۶۶۴۰	۲۷۶۱	۴۵۲۶۰	۴۳۷۷۲۶	۹/۳۸
۷۲-۷۳	۰/۰۶۳۶۰	۴۳۸۷۹	۲۷۹۰	۴۲۴۸۴	۳۹۲۴۶۶	۸/۹۴
۷۳-۷۴	۰/۰۶۸۴۱	۴۱۰۸۹	۲۸۱۱	۳۹۶۸۴	۳۴۹۹۸۲	۸/۵۲
۷۴-۷۵	۰/۰۷۳۳۷	۳۸۲۷۸	۲۸۲۸	۳۶۸۸۳	۳۱۰۲۹۸	۸/۱۱
۷۵-۷۶	۰/۰۷۸۷۱	۳۵۴۷۰	۲۷۵۶	۳۴۰۹۲	۲۷۳۴۱۵	۷/۷۱
۷۶-۷۷	۰/۰۸۳۵۷	۳۲۷۱۴	۳۷۳۴	۳۱۳۴۷	۲۳۹۳۲۳	۷/۳۲
۷۷-۷۸	۰/۰۸۹۸۶	۲۹۹۸۰	۲۶۹۴	۲۸۱۳۳	۲۰۷۹۷۶	۶/۹۴
۷۸-۷۹	۰/۰۹۷۶۱	۲۷۲۸۶	۲۶۳۶	۲۵۹۶۸	۱۷۹۸۴۳	۶/۵۹
۷۹-۸۰	۰/۱۰۳۵۰	۲۴۶۵۰	۲۵۶۱	۲۳۳۷۰	۱۵۳۸۷۵	۶/۲۴
۸۰-۸۱	۰/۱۱۹۵۹	۲۲۰۸۹	۲۴۶۶	۲۰۸۵۶	۱۳۰۵۰۵	۵/۹۱
۸۱-۸۲	۰/۱۱۹۸۶	۱۹۶۲۳	۲۳۵۲	۱۸۴۴۷	۱۰۹۶۴۹	۵/۹۱
۸۲-۸۳	۰/۱۲۸۷۷	۱۷۲۷۱	۲۲۲۴	۱۶۱۵۹	۹۱۲۰۲	۵/۵۹
۸۳-۸۴	۰/۱۲۸۷۷	۱۷۲۷۱	۲۲۲۴	۱۶۱۵۹	۹۱۲۰۲	۵/۲۸
۸۴-۸۵	۰/۱۴۸۹	۱۲۹۶۷	۱۹۳۲	۱۲۰۰۱	۶۱۰۳۲	۴/۷۱
۸۵-۸۶	۰/۱۵۹۰۱	۱۱۰۴۳	۱۷۵۶	۱۰۱۶۶	۴۹۰۳۱	۴/۴۴

(۱)	(۲)	(۳)	(۴)	(۵)	(۶)	(۷)
$x+t \mid x$	$_tq_x$	l_x	$_td_x$	$_tL_x$	T_x	e^0_x
۸۶-۸۷	۰/۱۶۶۷۲	۹۲۸۸	۱۵۴۸	۸۵۱۴	۳۸۸۶۸	۴/۱۸
۸۷-۸۸	۰/۱۸۲۶۴	۷۷۰۴	۱۴۰۷	۷۰۰۰	۳۰۳۵۱	۳/۹۴
۸۸-۸۹	۰/۱۹۵۶۴	۶۲۹۷	۱۲۳۲	۵۶۸۱	۲۳۳۵۱	۳/۷۱
۸۹-۹۰	۰/۲۰۹۳۱	۵۰۶۵	۱۰۶۰	۴۵۳۵	۱۷۶۲۰	۳/۴۸
۹۰-۹۱	۰/۲۲۴۰۷	۴۰۰۵	۸۹۷	۳۵۵۶	۱۳۱۳۵	۳/۲۸
۹۱-۹۲	۰/۲۳۹۳۸	۳۱۰۸	۷۴۴	۲۷۳۵	۹۵۷۹	۳/۰۸
۹۲-۹۳	۰/۲۵۵۵۰	۲۳۶۴	۶۰۴	۲۰۶۲	۶۸۴۴	۲/۸۹
۹۳-۹۴	۰/۲۷۲۷۳	۱۷۶۰	۴۸۰	۱۵۲۰	۴۷۸۲	۲/۷۲
۹۴-۹۵	۰/۲۹۱۴۱	۱۲۸۰	۳۷۳	۱۰۹۴	۳۲۶۲	۲/۵۵
۹۵-۹۶	۰/۳۰۹۸۲	۹۰۷	۲۸۱	۷۶۷	۲۱۶۸	۲/۳۹
۹۶-۹۷	۰/۳۳۰۶۷	۶۲۶	۲۰۷	۵۲۲	۱۴۰۱	۲/۳۴
۹۷-۹۸	۰/۳۵۰۸۳	۴۱۹	۱۴۷	۳۴۵	۸۷۹	۲/۱
۹۸-۹۹	۰/۳۷۱۳۲	۲۷۲	۱۰۱	۲۲۲	۵۳۴	۱/۹۶
۹۹-۱۰۰	۰/۳۹۷۶۶	۱۷۱	۶۸	۱۳۷	۳۱۲	۱/۸۲
۱۰۰-۱۰۱	۰/۴۱۷۴۷	۱۰۳	۴۳	۸۱	۱۷۵	۱/۷
۱۰۱-۱۰۲	۰/۴۲۶۲۳	۶۰	۲۷	۴۶	۹۴	۱/۵۷
۱۰۲-۱۰۳	۰/۴۳۰۱۸	۳۳	۱۶	۲۵	۴۸	۱/۴۵
۱۰۳-۱۰۴	۰/۴۴۱۱۷	۱۷	۱۰	۱۲	۲۳	۱/۳۵
۱۰۴-۱۰۵	۰/۴۵۲۱۱	۷	۵	۴	۱۱	۱/۲۷

منابع و مآخذ

۱. خواجه نوری، دکتر عباسقلی (۱۳۴۸). آمار پیشرفته و بیومتری، انتشارات دانشگاه تهران، تهران.

۲. منج، والتر، ا. (ترجمه محمود عادل) (۱۳۷۳). ریاضیات بیمه عمر، انتشارات بیمه مرکزی ایران، تهران.

1. Arjas, E.(1988).A Graphical Method for Assessing Goodness of Fit in Cox,s Proportional Hazard Models. Journal of American Statistical Association, 83, ,04-212.

2. Armitage, P. (1959).The Comparison of Survival Curves. Journal of the Royal Statistical Society, Series A, 122,279-300.

3. Breslow, N.E.(1975). Analysis of Survival Data Under the Proportional Hazard Models. International Statistical Review, 43,45-48.

4. Benjamin, B., Pollarad, J.H.(1983).The Analysis of Mortality and Other Actuarial Statistics. Wiley, New York.

5. Cox, D.R, and Oakes, D. (1984). Analysis of Survival Data. Chapman and Hall, New York.

6. Douglas, C.M., (1988). Introduction to Linear Regression Analysis. Chapman and Hall. New York.

7. Elandt - Johnson, R. C., and Johnson, N.L. (1980). Survival Models and Data Analysis. Wiley, New York.

8. Frances, H.F. (1994). Fitting A Gompertz Curve. Journal of Operational Research Society, 45, 100-113.

9. Gerber, H. et al. (1997). Actuarial Mathematics. American Society of Actuaries.

10. Garg, M.L., Rao, B. R. and Redmond, C.K. (1970). Maximum - likelihood Estimation of the Parameters of the Generalized Extreme - Value Distribution. Applied Statistics, 34,301-310.

11. Kale, B.K., Sinha, S.K. (1974). Life Testing and Reliability Estimation. Chapman *and Hall, New York.*

12. Lee, E.T. (1992). Statistical Method for Survival Data Analysis. Wiley, New York.

13. Mann, N.R. (1974). Methods for Statistical Analysis of Reliability and Life Data. Wiley, New York.

14. Moreau, T. and Oquigley, J.(1985). A Global Goodness - of- Fit Statistic for Proportional Hazard Midels _ Applied Statistic , 34, 212-218.

15. Nelson, W. (1972). Theory and Application of Hazard Plotting for Censored Failure Data, Technometrics, 14,945-966.

16. Wei, L.J.(1984). Testing Goodness - of - Fit for Proportional Hazard Model With Censored Observations. Journal of the American Statistical Association, 79, 649-652.