نومینالیسم، رئالیسم و فیزیکالیسم در ریاضیات

مؤلف : ای. دی. اروین
مترجم: مهدی دشت‌بزرگی

۱. رنسانس جدید در فلسفهٔ ریاضیات

در پانزده سال اخیر شاهد رنسانسی در فلسفهٔ ریاضیات بوده‌ایم که از زمان هیلبرت، راسل و براور در آغاز این قرن تاکنون سابقه نداشته است. بیشتر این کار جالب و جدید در پاسخ به مسائلی است که پل بناسراف (Paul Benacerraf) در مقالهٔ معتبرش به نام «صدق ریاضی» در ۱۹۷۳ مطرح کرده است. بناسراف در این مقاله از مشکل ارائهٔ یک معناشناسی (سمانتیک) قابل قبول برای ریاضیات سخن می‌گوید. او بر این مطلب تأکید می‌ورزد که ارائه معناشناسی به شیوهٔ موسوم که بتواند هم یک نظریهٔ جامع و هم یک معرفت‌شناسی علمی را دربرگیرد، دشوار است. چنانکه می‌گوید: «دو گونه مسأله کاملاً متمایز به‌طور جداگانه سبب تفسیرهایی از ماهیت صدق ریاضی شده است: ۱) مسألهٔ داشتن یک نظریهٔ معناشناسی همگون در کل زبان که در آن، معناشناسی قضایای ریاضی با معناشناسی قضایای زبان مشابه و موازی باشد. ۲) این مسأله که هر نظریه‌ای دربارهٔ صدق ریاضی با معرفت‌شناسی معقولی همراه و سازگار باشد. تقریباً شاید بتوان تمام تفسیرهای به‌عمل آمده از صدق ریاضی را یکی کرد، البته به قیمت قربانی‌کردن و کنارگذاشتن یکی به نفع دیگری».

بناسراف اظهار می‌کند که با فرض اهمیت تئوریهای علّی از مصداق و معرفت، به هیچ وجه روشن نیست که چگونه اشیاء ریاضی غیرمادی (اگر وجود دارند) می‌توانند شناخته شوند. مسلم انگاشتن وجود چنین ذواتی یک چیز است و توانایی اثبات اینکه ما شناختی از آنها داریم چیز دیگر. عین سخن بناسراف این است: «برای مثال، اگر اعداد نوعی از ذواتی هستند که معمولاً موجود فرض می‌شوند، آنگاه ارتباط میان شروط صدق برای قضایای مربوط به تئوری اعداد، با حوادث مرتبط با انسانهای واجد معرفت ریاضی، غیرممکن خواهد بود. بیان چگونگی حصول شناخت، نسبت به قضایای نظری مربوط به عدد، غیرممکن است.»

مارک استینر (Mark Steiner) نیز همین نکته را بیان می‌کند. او می‌گوید همچنانکه به‌طور سنتی استنباط می‌شد، ذوات ریاضی، خارج از شبکه ارتباط علّی وجود دارند؛ لذا چنین ذواتی (اگر وجود دارند) بالضروره قابل درک، و درنتیجه شناختنی نیستند. استینر می‌گوید: «اشکال این است که اگر ذوات ریاضی واقعاً وجود دارند، شناختنی نیستند؛ بنابراین حقایق ریاضی غیرقابل شناختند. هیچ علمی نمی‌تواند اشیا و موجوداتی را

بررسی کند که تأثیر علّی بر امر روزمره نداشته باشد. ... از آنجا که اعداد از تمام سلسلهٔ علل و زمان و مکان بیرون‌اند، پس کشف‌ناشدنی هستند. لذا ریاضیدانان با این معضل مواجه‌اند که: یا اصول موضوعهٔ آنها درست نیست (با فرض عدم ذوات ریاضی) یا آنها قابل شناخت نیستند.»

چنین مباحثی بیشتر به دلیل تمایل به امتزاج ریاضیات با دیدگاهی کلی که مقبول فیزیکالیسم باشد، مطرح می‌شود؛ بنابراین از طرفی اشتیاق به گسترش یک معرفت‌شناسی طبیعی و مقبول برای ریاضیات وجود دارد و از طرف دیگر برای محو لوازم هستی شناختیی که علوم طبیعی آنها را تشخیص نداده، و به آنها احتیاج نداشته، تمایلی ایجاد شده است و درنتیجه نه‌تنها در فلسفهٔ ریاضیات آشفتگی جدیدی رخ داده بود، بلکه ترسیم مجدد مرزهای سنتی درون این نظم مطرح شد.

به‌دنبال مقالهٔ بناسراف، مقاله استینر (Steiner) با نام معرفت ریاضی (۱۹۷۵) و پس از آن، مقالات پنلوپ مدی (Penelope Maddy) و مایکل رسنیک (Michael Resnik) منتشر شد. هر سه نویسنده از میان دو امر مطلوب بناسراف بر اولی تأکید ورزیدند؛ بدین معنی که «تئوری سمانتیکی همگون» را مورد توجه قرار دادند. درنتیجه، همهٔ آنها بر نوعی از افلاطون‌گرایی تأکید کردند؛ بنابراین آنان با پذیرش محاسن سمانتیک واحد تلاش کردند تا تفسیر علمی قابل قبولی از معرفت ریاضیی که با سمانتیک آنها سازگار باشد، بسط و گسترش دهند.

درهمان زمان، برنامه‌های نومینالیستی متعددی مطرح شد که برجسته‌ترین آنها به هارتری فیلد (Hartry Field) متعلق بود که در سال ۱۹۸۰ آغاز شد و هم‌اکنون با عنوان علم بدون اعداد بسیار مشهور است. برنامه‌هایی مانند برنامهٔ فیلد بر مطلوب دوم بناسراف، یعنی معرفت‌شناسی غیرقابل اعتماد تأکید دارد. مؤلفانی مانند فیلد با ساختن شقوق نومینالیستی به جای تفسیر رئالیستی از ریاضیات عملاً استدلال کرده‌اند که نیازی نیست معرفت‌شناسی قابل قبول علمی از نظر ارتباط با ریاضیات کنار نهاده شود. در عوض، فیلد ادعا می‌کند که می‌توان ریاضیات را ابزارانگارانه تفسیر کرد و درنتیجه به‌طور فیزیکالیستی قابل قبول باقی می‌ماند.

از آن زمان تاکنون کتابهای بسیاری در این زمینه انتشار یافته است. در سال ۱۹۸۰ مایکل رسنیک کتاب فرگه و فلسفهٔ ریاضیات را منتشر کرد و سپس در سال ۱۹۸۳ کتاب ماهیت معرفت ریاضی نوشتهٔ فیلیپ کیچر (Philip Kitcher) و کتاب مفهوم اعداد از نظر فرگه نوشتهٔ کریسپین رایت (Crispin Wright) منتشر شد و مورد استقبال قرار گرفت. به‌دنبال اینها در سال ۱۹۸۴ مایکل هالت (Michael Hallett) کتاب نظریه مجموعه‌های کانتور و محدودیت اندازه و مایکل دتلفسن (Michael Detlefsen) در سال ۱۹۸۶ کتاب برنامهٔ هیلبرت را منتشر کردند.

در سالهای اخیر کتاب اشیاء انتزاعی (۱۹۸۷)، اثر باب هیل (Bob Hale)، کتاب فصول: مطالعه‌ای در هستی‌شناسی (۱۹۸۷) اثر پیتر سیمونز (Peter Simons)، کتاب واقعیت اعداد (۱۹۸۸) اثر جان بیگلو (John Bigelow) و نیز کتاب تاریخ و فلسفه ریاضیات جدید (۱۹۸۸) اثر مشترک ویلیام اسپری (William Aspray)

و فیلیپ کیچر مؤثر بوده‌اند. همچنین می‌توان به کتاب ریاضیات بدون اعداد (۱۹۸۹) نوشتهٔ جفری هلمان (Geoffrey Hellman) و کتاب رئالیسم در ریاضیات اثر پنلوپ مدی اشاره کرد.

۲. مشکلات سنتی با نومینالیسم

مباحثی که بناسراف و استینر مطرح کردند و موجب ایجاد برنامه‌های نومینالیستی همچون برنامه فیلد شد، مطالب بسیاری به آن برنامه‌ها ارائه دادند. این مباحث تأکید می‌کنند که هر معرفت‌شناسی ماندگاری باید بتواند معرفت ریاضی را تبیین کند و نیز با بهترین تئوری معرفت علمی سازگار باشد. درنتیجه این تأکید، تمام این مباحث نیازمند پذیرش شکلی از معرفت‌شناسی طبیعی است. آنها بر این نکته تأکید می‌ورزند که هرگونه تفسیر مقبولی از معرفت باید (حداقل به‌طور مقدماتی) بر آنچه ما نمونه‌های عالی معرفت می‌دانیم، مبتنی باشد؛ یعنی آن تفسیر بر مواردی استوار باشد که ما مدعی هستیم دربارهٔ آنها اطلاعاتی داریم، صرفاً به این دلیل که می‌توان سلسلهٔ علّی مناسبی را در آنها یافت. درنتیجه به‌نظر می‌رسد در ارتباط با ریاضیات بی‌درنگ دوشق ظاهر می‌شود: یا باید نومینالیسم را پذیرفت (و درنتیجه از مشکلات معرفت‌شناختی سنتی افلاطون‌گرایان اجتناب کرد) یا باید شکلی از رئالیسم را قبول کرد (در عین حال باید از تفسیری از معرفت ریاضی دفاع کرد که با مدخلیت ذوات ریاضی در درون سلسله‌ای علّی سازگار باشد).

از این دوشق، ظاهراً گزینهٔ نومینالیستی است که در درجهٔ اول ترجیح داده می‌شود. گذشته از این، ذوات ریاضی به‌طور سنتی وجودهایی تلقی می‌شوند که خارج از زمان و مکان‌اند و لذا از نظر علّی بی‌خاصیّت هستند. با علم به این مطلب، تفسیرهای نومینالیستی بدیهی به‌نظر می‌رسند. با این حال، برنامه‌هایی مانند برنامهٔ فیلد به دلیل نتایج غیرشهودی و نارساییهای فنی مورد انتقاد واقع شده‌اند؛ برای مثال در خصوص گزینهٔ دوم اغلب به این نکته اشاره می‌شود که استفاده از وسایل منطقی درجه دوّم که فیلد بیان می‌کند، حاوی ساختارهایی است که با تصورهای نومینالیستی سازگار نیست و حتی اگر آنها را بپذیریم، معلوم نیست که بتوان تمام دانش فیزیکِ ریاضی را در این نوع بازسازی تحصیل کرد.

برای مثال، در مورد گزینه اول می‌توان به این مطلب اشاره کرد که اگر این ادعای فیلد درست باشد که اصطلاحات ریاضی ما بازاء ندارند و لذا گرچه گزاره‌های ریاضی (گزاره‌هایی که اصطلاحات ریاضی را تسویر می‌کنند) مفیدند، اغلب کاذب‌اند، آنگاه جملاتی از قبیل:

(۱) راسل می‌داند که $۲۷ = ۳^۳$،

هرچند عموماً صادق به‌نظر می‌رسند، ولی کاذب هستند. همین‌طور جملاتی از قبیل:

(۲) هیچ عدد اولی نیست که از ۱۰۰ بزرگتر باشد،

گرچه عموماً کاذب به‌نظر می‌رسند، ولی صادق‌اند. در مورد (۱) اگر صادق باشد که راسل می‌داند $۲۷ = ۳^۳$، از تز استلزام (یعنی تزی که متضمن صدق باشد) چنین برمی‌آید که «$۲۷ = ۳^۳$» صادق است، ولی فیلد آن را انکار می‌کند. در مورد (۲) چنین نتیجه می‌شود که «هیچ عدد اوّلی نیست که از ۱۰۰ بزرگتر باشد» صادق

است؛ زیرا به‌نظر فیلد هیچ عددی اصلاً وجود ندارد!

گذشته از اینها حتی اگر پاسخی به این دو اشکال وجود داشته باشد، معلوم نیست که نومینالیسم ریاضی بتواند پاسخگوی اشکالات مشهوری باشد که بر نومینالیسم سنتی وارد شده، چه رسد به دعاوی معضل بناسراف. ظاهراً اشکالات سنتی به نومینالیسم از آن حیث که به کلیات مربوط می‌شود به همان اندازه برنامه‌های نومینالیستی معاصر در ریاضیات اثر گذاشته است. فی‌المثل این جمله را در نظر بگیرید:

(۳) تعداد Fها حداقل ۳ است.

چنین جمله‌ای قاعدتاً بی‌هیچ مشکلی به منطق محمولات درجه اول ترجمه می‌شود؛ مثلاً همان‌طور که بیگلو بیان می‌کند ترجمهٔ آن ممکن است چنین باشد:

$\forall x \forall y \exists z (x \neq z \,\&\, y \neq 2 \,\&\, fz)$ (۴)

آنچه در این مورد و در مورد ترجمه‌های مشابه دیگر جالب توجه است این است که جملهٔ (۴) برخلاف جملهٔ (۳) به عدد خاصی مانند ۳ یا حتی اعداد به‌طور کلی اشاره نمی‌کند؛ از اینجا متوجه تشابه میان نومینالیسم در ریاضیات و نومینالیسم سنتی مربوط به کلیات، می‌شویم؛ یعنی مشابهت بین جملات (۳) و (۴) و دو جملهٔ زیر را درک می‌کنیم:

(۵) رنگ کتاب قرمز است

و

(۶) کتاب قرمز است.

جملهٔ (۶) مانند جملهٔ (۴) غالباً ترجمه‌ای تلقی شده که برخلاف جملهٔ (۵) به‌طرز زیرکانه‌ای هرگونه ارجاعی را غیر از اشاره و ارجاع به افراد جزئی انکار می‌کند.

بنابراین هر دو جملهٔ (۴) و (۶) این اعتقاد را توجیه می‌کنند که لازم نیست چیزی غیر از جزئیات، موجود فرض شود. اگر به قول کواین، وجود داشتن به معنای ارزش داشتن یک متغیر است، آنگاه (۴) و (۶) به‌لحاظ هستی‌شناختی به گونه‌ای متفاوت از جملات (۳) و (۵) محض می‌شوند.

آیا نومینالیستهایی مانند فیلد باید از تشابه میان جمله (۳) و ترجمهٔ زیرکانه‌تر آن در جملهٔ (۴)، و نیز از تشابه میان جملهٔ (۵) و ترجمهٔ هوشمندانه‌تر آن در جملهٔ (۶) خشنود باشند؟ آیا ترجمه‌هایی از این قبیل، اگر به‌نحوی سیستماتیک و جامع بیان شوند، برای نومینالیسم سنتی یا ریاضی توفیقی به همراه خواهند داشت؟

برای پاسخ به این سؤال فقط باید این مشابهت را بیشتر گسترش دهیم تا دریابیم آیا ممکن است همان مشکلات خاصی که برای نومینالیسم سنتی مطرح بود، برای نومینالیسم ریاضی هم طرح شود؛ برای مثال جملات زیر را ملاحظه کنید:

(۷) تعداد سیارات با تعداد روزنه‌های سر انسان برابر است.

یا

(۸) ۳ عدد طبیعی وجود دارد که از یک بزرگتر و از پنج کوچکترند.

یا

(۹) پنج یک عدد است.

شخص نومینالیست این جملات را چگونه بازسازی می‌کند؟ اشکالاتی که بلافاصله به ذهن خطور می‌کند از قبیل شباهت میان جملات (۳) و (۵)، و یا شباهت میان ترجمه‌های مقبول نومینالیستی آنها در (۴) و (۶) نیست، بلکه شباهت میان جملات (۷) و مثلاً جملهٔ زیر (جملهٔ ۱۰) است که به ذهن متبادر می‌شود:

(۱۰) رنگ قرمز بیشتر به نارنجی شبیه است تا به آبی،

یا شباهت بین جمله (۹) و مثلاً این جمله:

(۱۱) قرمز رنگ است.

اشکالات ساخت جملات (۱۰) و (۱۱) براساس نگرش نومینالیستی مشهود است و دست‌کم تاکنون غیرقابل حل بوده است و با فرض شباهت مزبور، چنین اشکالاتی با توجه به جملات (۷) و (۹) آیندهٔ خوبی را برای نومینالیسم پیش‌بینی نمی‌کند؛ برای مثال جملهٔ:

(۱۲) به‌ازای هر x، y و z، اگر x قرمز و y نارنجی و z آبی باشد، آنگاه x به y شبیه‌تر است تا به z،

که فقط به افراد اشاره می‌کند (و نه به اوصاف) نمی‌تواند معادل جملهٔ (۱۰) باشد؛ زیرا جملهٔ (۱۲) صادق نیست، و جملهٔ (۱۰) صادق است (همواره ممکن است و درواقع خیلی هم محتمل است که x خاصی بیشتر شبیه z باشد تا y، البته در زمینه‌هایی غیر از رنگ).

همچنین مکمن است ابتدا تصور شود که جملهٔ (۱۱) می‌تواند معادل جملهٔ (۱۳) باشد که مقبول نگرش نومینالیستی است.

(۱۳) به‌ازای هر فرد x، اگر x سرخ باشد، آنگاه x رنگین است.

اما اگر (۱۱) معادل (۱۳) باشد، آنگاه مطمئناً:

(۱۴) به‌ازای هر x، اگر x سرخ باشد، آنگاه x ممتد است،

معادل است با:

(۱۵) سرخ امتداد است.

اما چون (۱۴) که صادق است، حتی مستلزم (۱۵) که کاذب است، نیست، این دو را نمی‌توان معادل دانست و لذا ممکن نیست که (۱۱) معادل (۱۳) باشد؛ بنابراین هرچند جملهٔ (۴) ممکن است از دیدگاه نومینالیستی ترجمهٔ مقبولی از جملهٔ (۳) باشد، همانطور که جملهٔ (۶) ممکن است از دیدگاه نومینالیستی ترجمهٔ مقبولی از جملهٔ (۵) به‌حساب آید، در آن صورت اگر تمثیل ما درست باشد، صوری کردن جملاتی از قبیل (۷)، (۸) و (۹) دست‌کم به‌اندازهٔ صوری کردن جملاتی نظیر (۱۰) و (۱۱) دشوار خواهد بود. با این همه ظاهراً جملات (۷)، (۸)، (۹) مانند (۱۰)، (۱۱) به‌آسانی قابل تحویل به گزاره‌های جزئی نیست؛ برای مثال می‌توان جملهٔ (۹) را با ترجمه به جملهٔ زیر صوری کرد:

(۱۶) به‌ازای هر مجموعهٔ x ی اگر مجموعهٔ x پنج عضو داشته باشد، آنگاه اعضای x معدود

است.

اما اگر جملهٔ (۹) معادل (۱۶) است، آنگاه مطمئناً جملهٔ:

(۱۷) به‌ازای هر مجموعهٔ x ی ۱گر مجموعه x پنج عضو داشته باشد؛ آنگاه اعضای x متمایزند.

با جملهٔ (۱۸) معادل خواهد بود:

(۱۸) پنج تمایز است.

اما چون جملهٔ (۱۷) که صادق است، حتی مستلزم (۱۸) که کاذب است نیست، این دو نمی‌توانند معادل باشند؛ بنابراین جملهٔ (۹) نمی‌تواند با (۱۶) معادل باشد.

می‌توان گفت که ظاهراً صوری کردن جملات ریاضی به‌طور کلی آسانتر از جملات سنتی نیست و بنابراین شاید اصلاً نتوان آنها را صوری کرد. با این حال حتی اگر ثابت شود که برنامه‌ای مانند برنامه فیلد امکان تحقق دارد؛ به این معنا که می‌تواند برای هر جمله‌ای از این قبیل ترجمهٔ مقبولی از نظرگاه نومینالیسم ارائه دهد، باز به یک معنا می‌توان ادعا کرد که این مطلب در این موزد تعیین‌کننده نخواهد بود. سرانجام، همان‌گونه که بیگلو اشاره می‌کند جمله‌ای مانند جملهٔ:

(۱۹) جان برادر تنی مارک است.

ممکن است کاملاً معادل جملهٔ (۲۰) به‌نظر آید:

(۲۰) دو نفر مشخص وجود دارند که والدین جان و همان دو والدین مارک هستند.

که در جملهٔ (۱۹) اشاره‌ای به والدین نمی‌شود. با این حال هیچ‌کس نباید فکر کند که جملهٔ (۱۹) زمینهٔ مناسبی برای عدم اعتقاد به‌وجود والدین است. روشهای دقیق نومینالیسم را باید فقط به عنوان شرط لازم برای تمسک به اُسترهٔ اکام در نظر گرفت و نه به عنوان شرط کافی.

۳. گزینهٔ رئالیستی

رئالیسم وقتی با سمانتیک مصداقی معمول و شایع جابه‌جا شود در بدو نظر نسبت به نومینالیسم مزایای بسیاری دارد؛ لیکن این مطلب که تفسیر شخص رئالیست از حقایق ریاضی با دیدگاههای معناشناختی شهودی و ماقبل فلسفی بسیاری از ریاضیدانان سازگاری دارد از زمرهٔ این مزایا به‌شمار نمی‌آید.

اما برای کسی که می‌خواهد وجود ذوات ریاضی را اثبات کند، باید مشکل سازگاری چنین ذواتی با معرفت‌شناسی مقبولی حل شده باشد. وقتی تفسیر مصداقی از حقایق ریاضی مطرح می‌شود، بی‌درنگ چنین سؤالی به‌ذهن خطور می‌کند: چگونه از حقایقی که صدق جملات ریاضی را مشخص می‌کند آگاهی حاصل می‌شود؟ شخص رئالیست با این مشکل مواجه است که چگونه می‌توان دو مطلب را با یکدیگر مرتبط ساخت: مطلب اول، تفسیری ممکن از ساختار مصداقی تئوریهای ریاضی؛ و مطلب دوم، تبیینی از امکان چگونگی شناخت حداقل تعداد جملات بنیادین غیراستنتاجی و ماقبل صوری.

در بحث از این موضوع، استینر تمایز میان افلاطون‌گرایی هستی شناختی و افلاطون‌گرایی

معرفت‌شناختی را مطرح می‌کند. به‌نظر او افلاطون‌گرایی هستی‌شناختی دیدگاهی است که معتقد است «حقایق ریاضی»، اشیاء ریاضی واقعی را توصیف می‌کنند.» بعلاوه، گفته می‌شود که چون تعداد این اشیاء ضرورتاً نامحدود است، باید از اشیاء جهان فیزیکی متمایز شوند. درعوض، قضایای ریاضیات صادق‌اند، اگر و تنها اگر به‌طور صحیح این اشیاء را توصیف کنند. به گفتهٔ استینر: «بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که سؤال از قابل دفاع بودن افلاطون‌گرایی (هستی شناختی) عین سؤال از صدق اصول موضوعهٔ ریاضیات است.» البته این نتیجه، افلاطون‌گرایی هستی شناختی را روشنتر می‌کند.

در مقابل، افلاطون‌گرایی معرفت‌شناختی «نظریه‌ای است که برطبق آن همهٔ ما یا دست‌کم برخی از ما، حقایقی را دربارهٔ ذوات ریاضی از طریق قوه‌ای شبیه به ادراک هستی می‌شناسیم. در اینجاست که برای افلاطون‌گرایان مشکلاتی پیش می‌آید. اگر افلاطون‌گرایی هستی شناختی درست باشد و اگر ذوات ریاضی که از حقایق عالم فیزیکی متمایزند موجود باشند، آنگاه ظاهراً احتمال صدق نظریهٔ افلاطون‌گرایی معرفت‌شناختی کم خواهد بود.

دست‌کم بعید است که هر نوع ادراکی در ملاحظهٔ اشیایی که هیچ نقش علّی در دنیای طبیعی زمان و مکان ندارند بتواند این نتیجه را بدهد. فیزیکالیسم و نیازهای معرفت‌شناسی طبیعی، نگرانیها و مشکلاتی برای افلاطون‌گرایان به‌وجود آورده است.

به‌نظر می‌رسد این ناسازگاری بظاهر اساسی بین افلاطون‌گرایی هستی شناختی و افلاطون‌گرایی معرفت‌شناختی (دست‌کم تا اندازه‌ای) به‌شکل یا اشکال دیگری از تئوری علّی معرفت وابسته است؛ یعنی بخشی از آن بر این ادعا مبتنی است که شرط ضروری حصول معرفت این است که دست‌کم ارتباطِ علّی بین فاعل معرفت‌شناختی و هر آنچه ضامن صدق یک عقیده است، وجود داشته باشد. اگر در اصل، هیچ گونه ارتباط علّی بین مصادیق نامها، محمولها و سورهای یک جمله با فاعل شناخت وجود نداشته باشد، نمی‌توانیم بفهمیم که چگونه اعتقاد این فاعل دربارهٔ چنین جمله‌ای می‌تواند توجیه شود. همان‌طور که مدی اظهار می‌کند در علوم فیزیکی «ما با ایستادن در انتهای یک سلسلهٔ علّی مرتبط به هم به اشیاء و انواعی از اشیاء اشاره می‌کنیم؛ امّا به‌نظر می‌رسد هیچ نمونه‌ای از این «مجموعه» مشمول نامگذاری اولیه نمی‌شود؛ بنابراین استدلال از این قرار است که نه‌تنها ما نمی‌توانیم حقایقی را در مورد مجموعه‌ها بدانیم، بلکه همچنین نمی‌توانیم به آنها اشاره کنیم. پس درواقع، تئوری مجموعه‌ها از آن سنخ نیست که به هویاتی به نام مجموعه‌ها اشاره کند.

بنابراین، از این بحث مهم دربارهٔ قابلیت دفاع از افلاطون‌گرایی، این سؤال مطرح می‌شود که ریاضیدان چگونه به مجموعهٔ مسلّمی از اشیاء ریاضی که مستقلاً موجودند، دست می‌یابد. افلاطون‌گرایان باید به این سؤال پاسخ گویند که چگونه ذوات افلاطونی غیر فیزیکی و غیر علّی به تجربه مرتبط می‌شوند؛ بنابراین مشکل افلاطون‌گرایان در اینجاست که باید تلاشی برای سازگاری و تطبیق افلاطون‌گرایی هستی‌شناختی با تئوری علمی معاصر از ادراک و مصداق ریاضی صورت گیرد. به‌بیان روشنتر، می‌توان استنباط کرد که

افلاطون‌گرایی هستی‌شناختی و معرفت‌شناختی این شش نکته را دربردارند:

۱. ذوات ریاضی مستقل از اندیشهٔ انسان و مستقل از توانایی یا ناتوانی ما از کسب معرفت دربارهٔ آنها وجود دارند.

۲. چنین ذواتی غیر فیزیکی‌اند و خارج از زمان و مکان وجود دارند.

۳. قضایای ریاضی مستقل از اندیشهٔ انسان و مستقل از ناتوانی یا توانایی ما از کسب معرفت دربارهٔ آنها دارای ارزش صدق‌اند.

۴. چنین قضایایی ارزش صدق خود را درنتیجهٔ خواص ذوات ریاضی به‌دست می‌آورند (و نه درنتیجهٔ خواص زبانهای صوری و طبیعی و امثال اینها).

۵. می‌توان به‌طور آشکار به چنین ذواتی اشاره کرد.

۶. می‌توان نسبت به آنها معرفت حاصل کرد.

اکنون با تفکیک این شش نکته می‌توان میان افلاطون‌گرایی ریاضی و رئالیسم ریاضی تمایز قائل شد. رئالیسم، هم رئالیسم ریاضی استعلایی (افلاطون‌گرایی) را دربر دارد و هم رئالیسم ریاضی غیراستعلایی را (هر رئالیسمی که مقبول شخص فیزیکالیست باشد). بویژه آنکه رئالیسم به‌طور محدود می‌تواند فقط با (۱) و به نحو وسیعتر با ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ متحد شود؛ بنابراین رئالیسم ریاضی غیراستعلایی را می‌توان رئالیسمی دانست که مدعی است باید حقایق ریاضی به نحو طبیعت‌گرایانه تعبیر شود. تنها در این نکته است که شخص رئالیست غیراستعلایی از افلاطون‌گرایی متمایز می‌شود. همچنانکه در افلاطون‌گرایی، هم رئالیسم و هم رئالیسم ریاضی اجزای خاص معرفت‌شناختی و هستی شناختی مربوط به خود را خواهند داشت.

افلاطون‌گرایان با قبول ۱ از طریق ۴ با مشکل دفاع از ۶ و ۷ مواجه می‌شوند. بی‌درنگ سه‌گونه پاسخ کلی به ذهن خطور می‌کند: اولین پاسخ این است که افلاطون‌گرا تئوری علّی معرفت را انکار کند و بپذیرد که به‌نحوی می‌توان از ذواتی که به‌طور علّی غیرفعال‌اند، معرفت حاصل کرد. افلاطون‌گرایان سنتی و همچنین استینر در سالهای ۱۹۷۳ و ۱۹۷۵ به شیوه‌های گوناگون از این رهیافت طرفداری و حمایت کرده‌اند. علاوه بر اینها رسنیک (Resnik) و براون (Brown) نیز این رهیافت را انتخاب کرده‌اند.

پاسخ دوم این است که تعبیری از تئوری علّی معرفت پذیرفته شود، ولی این ادعا انکار شود که ذوات ریاضی از نظر علّی بی‌خاصیت‌اند. این رهیافتی است که مدی در سال ۱۹۸۰ شدیداً از آن دفاع کرده است. بناسراف با کنارگذاشتن افلاطون‌گرایی به‌نفع نوعی رئالیسم غیراستعلایی با مبارزه‌ای معرفت‌شناختی مواجه شده است.

پاسخ سوم این است که باید در موارد اساسی واژه‌هایی راکه در این بحث مطرح شد، تغییر داد. این کار را مثلاً با معرفی نوعی ساختارگرایی مبتنی بر منطقِ موجّهات که هلمن (Hellman) از آن دفاع کرده یا همچون گاتیر (Gauthier) با دفاع از نوع دیدگاههای ساختارگرایی که ممکن است به‌طور طبیعی (حداقل در مواردی خاص) برای فیزیکالیست جذابیت داشته باشد، باید انجام داد.