مناقشه «اثبـات»

تاریخ دریافت: ۸۶/۰٤/۱۰
تـاریخ تـاییـد: ۸۶/۰۷/۲۰

غلامحسین مقدم حیدری
عضو هیأت علمی پژوهشگاه علوم انسانی

چکیده

حدس چهار رنگ - اینکه برای رنگ کردن هر نقشه جغرافیایی چهار رنگ کـافی اسـت - یکـی از حـدس‌هـای مـشهور ریاضی است که بیش از صد سال فکر ریاضی‌دانان را به خود مشغول کرده بود. در سال (۱۹۷۶) اثبات کاملی از این قضیه با استفاده از کامپیوترها ارائه شد. این اثبات قابل بررسی، بازبینی و تأیید مستقیم به وسیله یک عامل عقلانی نبـود. یعنـی ریاضی‌دانان نمی‌توانستند تک تک مراحل این اثبات را به وسیله دست و مداد و کاغذ کنترل نمایند. به عبارت دیگـر ایـن اثبات صوری‌پذیر بود اما بررسی‌پذیر نبود. بنابراین چنین اثباتی یک اثبات به شیوه سنتی در ریاضـیات نبـود. پـس آیـا اثبات کامپیوتری واقعاً یک اثبات ریاضی بود؟ پاسخ‌های متفاوت و معارض هم به این پرسش سبب مناقشه عظیمی درباره مفهوم «اثبات» یعنی بنیانی‌ترین مفهوم در ریاضیات شد و مجموعه‌ای از مسائل عمیق فلسفی را بوجود آورد. اما از آنجا که اثبات‌های کامپیوتری خصلتی کم و بیش تجربی به اثبات ریاضی می‌دهند بحران اثبات همچنان ادامه یافت تا سـرانجام بـه تأسیس مجله تخصصی ریاضیات تجربی در (۱۹۹۲) انجامید. این مقاله سعی دارد با استناد بـه شـواهد تـاریخی بـه بیـان پیامدهای فلسفی این مناقشه در عرصه ریاضیات بپردازد.

واژگان کلیدی: حدس چهار رنگ، اثبات ریاضی، صوری‌پذیری، بررسی‌پذیری، ریاضیات تجربی

حدس چهار رنگ

آیا تاکنون فکر کرده‌اید که هر نقشه جغرافیایی را حداکثر می‌توان با چند رنـگ، رنـگ‌آمیـزی کرد به طوری که هیچ دو کشور هم مرز با یک رنگ، رنگ‌آمیزی نشوند؟ شاید در وهلـه اول مـسئله به نظر پیش پا افتاده به نظر آید اما آشکار است که جواب آن برای سازندگان نقشه‌های جغرافیایی از اهمیت بسزایی برخوردار است. زیرا هرچه تعداد رنگ‌هایی که مصرف مـی‌کننـد کمتـر باشـد صـرفه اقتصادی بیشتری خواهند داشت. این مسئله اولین بار در سخنرانی موبیـوس[1] در سـال ۱۸۴۰ بیـان شد. ده سال بعد فرانسیس گوتریه[2] یکی از شاگردان کالج لنـدن از بـرادرش فریـدریک خواسـت تـا برخی از تلاش‌هایش بـرای حـل ایـن مـسئله را بـه اطـلاع اسـتادش دمورگـان[3] برسـاند. دمورگـان بلافاصله متوجه شد که مسئله به رغم صورت ساده‌اش، پیچیده و مشکل است. در همـان روز یعنـی ۲۳ اکتبر ۱۸۵۲ به ویلیام رون‌هامیلتون[4]، ریاضی‌دان ایرلندی، نوشت:

1. A.F.Mobius
2. Francis Guthrie
3. De Morgan
4. Hamilton

«امروز یکی از دانشجویانم درباره اثبات واقعیتی پرسید که نمی‌دانم درست است و هنوز نیز نمی‌دانم. او می‌گوید که اگر شکلی به هر صورتی تقسیم شود و بخش‌های آن به طور متفاوتی رنگ شوند به طوری که بخش‌های هم مرز با رنگ‌های متفاوتی رنگ شوند در این صورت حداکثر چهار رنگ برای این کار لازم است، نه پنج رنگ و نه بیشتر ... . اگر جواب‌های شما به من خیلی سطحی باشد به طوری که مرا موجود احمقی به حساب آورید آن وقت باید همان کاری را بکنم که ابولهول می‌کند ... » (May, Kenneth,1965: 347). هامیلتون چنین پاسخ داد: «بعید است که به این زودی‌ها بتوانم درباره چهار تایی رنگ‌های شما کاری بکنم»(Ibid. 348). بدین‌گونه دمورگان مسئله‌ای را مطرح کرد که بعدها به «حدس چهار رنگ» مشهور شد. در امریکا در دهه ۱۸۶۰ چارلز پیرس[1] تلاش زیادی برای اثبات این مسئله کرد. در ۱۸۷۸ کیلی[2] در مقاله‌ای با عنوان «درباره رنگ‌آمیزی نقشه‌ها» در انجمن ریاضی لندن این پرسش را مطرح کرد که آیا این مسئله حل شده است یا نه. بعد از آن بود که سیل راه حل‌ها و شبه راه حل‌ها برای حل این مسئله به راه افتاد. در واقع حدس چهار رنگ اعوجاجی در ریاضیات بود که کوشش‌ها برای حل آن با ناکامی مواجه شده بود.

در ۱۸۷۹ آلفرد بری کمپ[3] در مجله «نیچر»[4] اثباتی برای این مسئله ارائه نمود. او از روشی استفاده کرد که بعدها به «روش زنجیرهای کمپ»[5] معروف شد. کمپ برای ارائه این راه حل مورد تحسین فراوان قرار گرفت و به عنوان یکی از همکاران جامعه سلطنتی انتخاب شد. در ۱۸۸۰ جان هی وود[6] مقاله‌ای با عنوان «قضیه رنگ‌آمیزی نقشه‌ها» منتشر کرد. او مقاله‌اش را چنین آغاز می‌کند: «[مقاله من] بیشتر ویران‌کننده است تا سازنده زیرا می‌خواهد نشان دهد که نقصی در اثبات شناخته شده کنونی وجود دارد»[7]. کمپ خودش ایراد اثباتش را به انجمن ریاضی لندن ارائه کرد و اعلام نمود که نمی‌تواند آن را رفع نماید.

تلاش‌های بعدی بر روی صورت‌بندی مسئله به زبان نظریه گراف انجام شد. اگر هر کشور در یک نقشه جغرافیایی با پایتختش مشخص شود و به جای مرز میان کشورها، راه‌های میان پایتخت‌ها قرار گیرد، شکل حاصل یک گراف نامیده می‌شود. پایتخت‌ها را «رأس»ها و راه‌ها را «یال»های گراف مزبور گویند. در این صورت مسئله چهار رنگ بدین صورت بیان می‌شود که: رأس‌هایی که فقط با یک یال منفرد بهم متصل هستند رنگ یکسان نداشته باشند.

اگر قطر تمام اشکال غیرمثلثی در یک گراف را رسم کنیم گراف به صورت مجموعه‌ای از مثلث‌ها در می‌آید. ناحیه درون هر مثلث را یک پیکربندی[8] نامند. یک مجموعه غیرقابل اجتناب[9]

---

1 .Charles Peirce
2. Cayley
3 .Alfred Bray Kempe
4. Nature
5. The Method of Kemp Chains
6. Percy John Heawood
7. http://www- groups.dcs.stand. ac. uk/~history/PrintHT/The-four-colour-theorem. html
8. configuration
9. unavoidable set

مجموعه‌ای از پیکربندی‌ها است که این ویژگی را دارد که هر مثلث بندی باید شامل یکی از پیکربندی‌های مجموعه باشد. یک پیکربندی تحویل شدنی[1] است اگر نتواند در یک مثلث‌بندی از گرافی کوچک‌تر قرار گیرد که قابل رنگ‌آمیزی با چهار رنگ نیست.[2]

جستجو برای مجموعه‌های قابل اجتناب در ۱۹۰۴ به وسیله وینیک[3] آغاز شد. او در سال ۱۹۱۲ طی مقاله‌ای به تعمیم کار هس وود پرداخت. بعد از او جی.دی. بیرکهوف[4] مفهومی از تحویل‌پذیری بیان کرد که کارهای بعدی بر اساس آن انجام گرفت. فرانکلین[5] در ۱۹۲۲ مثال‌هایی از مجموعه‌های غیرقابل اجتناب ارائه کرد و ایده بیرکهوف از تحویل‌پذیری را برای اثبات آن بکار برد که هر نقشه با تعداد نواحی کمتر یا مساوی ۲۵ ناحیه با چهار رنگ، رنگ‌آمیزی می‌شود.

تعداد نواحی که در یک نقشه با چهار رنگ قابل رنگ‌آمیزی بود به کندی افزایش می‌یافت. در ۱۹۲۶ رینولدز[6] آنها را به ۲۷ ناحیه و در ۱۹۴۰ وین[7] آنها را به ۳۵ ناحیه و در ۱۹۷۰ ارسی و استمپل[8] به ۳۹ ناحیه و در ۱۹۷۶ مایر[9] به ۹۵ ناحیه افزایش داد. در ۱۹۶۹ هش[10] روشی را معرفی کرد که با استفاده از آن حدس چهار رنگ با در نظر گرفتن مجموعه‌ای از حدود ۸۹۰۰ پیکربندی قابل حل بود. گرچه روش او با مشکلاتی همراه بود اما گام مهمی در راستای حل مسئله بود. سرانجام در ۱۹۷۲ دو همکار با نام‌های کننث اپل[11] و ولفگانگ هیکن[12] روش کاملی برای حل مسئله ارائه کردند. این روش بر تحویل‌پذیری بکار رفته در زنجیره‌های کمپ مبتنی بود. آنان بر اساس ایده‌های هش کار خود را انجام دادند و در نهایت توانستند یک مجموعه غیرقابل اجتناب با حدود ۱۵۰۰ پیکربندی بسازند. آنها با سعی و خطا مدت زیادی را صرف اصلاح این روش کردند. روش اثبات آنها فراتر از کاری بود که ریاضی‌دانان می‌توانستند با قلم و کاغذ انجام دهند. از این‌رو اپل و هیکن ناگزیر بودند که از کامپیوترها کمک بگیرند. آنان در این باره می‌گویند: «بعد از تقریباً سه سال تجربه سعی و خطا برای اصلاح این فرایند[13] متقاعد شدیم که پیکربندی‌هایی از اندازه بزرگتر از ۱۴ مورد نیاز هستند و آنچه این کار برای کامل شدن لازم داشت با کامپیوترهای قابل دسترس ما امکان‌پذیر است» (Appel & Haken , 1989: 8). در ۱۹۷۴ جان کچ[14]، دانشجوی تحصیلات تکمیلی علوم کامپیوتر، به آنها پیوست. در پاییز ۱۹۷۵ کچ برنامه‌ای

---

1. reducible

۲. برای توضیحات ریاضی بیشتر می‌توانید به کتاب زیر مراجعه کنید:
Robin J. Wilson(1985 third edition)Introduction to Graph Theory, Longman Science &Technical

3. Weinicke
4. G.D.Birkhoff
5. Franklin
6. Reynolds
7. Winn
8. Ore and Stemple
9. Mayer
10. Heesch
11. Kenneth Appel
12. Wolfgang Haken

۱۳. منظور فرایند discharging است.

14. John Koch

کامپیوتری برای این کار نوشت. سرانجام پس از ۶ ماه و ۱۲۰۰ ساعت کار با کامپیوتر، در جولای ۱۹۷۶ اثبات کامل شد. مراحل این اثبات در دو مقاله در ۱۹۷۷ به چاپ رسید. در ۱۹۸۹ اپل و هیکن این اثبات را با تمام جزییات و الگوریتم‌هایش در کتابی ۷۴۱ صفحه‌ای با عنوان *ریاضیات معاصر: هر نقشه مسطح با چهار رنگ قابل رنگ آمیزی است*[1] منتشر کردند.

۲- مفهوم فلسفی اثبات

گرچه مسئله چهار رنگ حل شد،اما روش حل آن مناقشه عظیمی را در حوزه ریاضیات و فلسفه ریاضی مطرح کرد. اکنون مسئله جدید این بود که آیا راه حل اپل و هیکن برای حدس چهار رنگ آن را به قضیه چهار رنگ تبدیل کرده است؟ مسئله چهار رنگ اولین قضیه‌ای بود که به کمک کامپیوترها اثبات می‌شد. جامعه ریاضی‌دانان تاکنون با چنین اثباتی روبرو نشده بود. هیچ ریاضی‌دانی تاکنون چنین اثباتی را ندیده بود. ریاضی‌دانان قادر نبودند تمام مراحل اثبات را گام به گام بررسی کنند. این کار تنها از عهده کامپیوترهایی با سرعت بالا بر می‌آمد.

راه حل اپل و هیکن در قلمرو پارادایم سنتی ریاضیات نمی‌گنجید، پارادایمی که تمامی اثبات‌های آن به وسیله ریاضی‌دانان و با بکارگیری قلم و کاغذ انجام می‌شد. این پرسش جدا مطرح بود که آیا راه حل اپل و هیکن واقعاً اثباتی برای مسئله چهار رنگ است؟ آیا این راه حل اساساً یک اثبات ریاضی است؟ این پرسش‌ها مناقشات فراوانی را میان ریاضی‌دانان و فیلسوفان سبب شد به طوری که بنیادی‌ترین مفهوم ریاضیات کلاسیک یعنی «اثبات» را به چالش کشید.

دو سال پس از مقالات اپل و هیکن، یعنی در ۱۹۷۹ مقاله «مسئله چهار رنگ و اهمیت فلسفی آن» نوشته توماس تیموچکو[2]، فتح بابی برای بحث‌های گسترده بعدی شد. او در مقاله‌اش به این مسئله می‌پردازد که اصولاً در ریاضیات «اثبات»[3] چه معنا و مفهومی دارد. او سه ویژگی مهم برای اثبات‌ها ذکر می‌کند:

۱) اثبات‌ها متقاعد کننده‌اند؛
۲) اثبات‌ها بررسی‌پذیرند؛[4]
۳) اثبات‌ها صوری‌پذیرند.[5]

برخی همچون ویتگنشتاین معتقدند که اثبات‌ها تنها باید متقاعد کننده باشند یعنی ریاضی‌دانان را متقاعد کنند. این اقناع شدن به تبیین ویژه خاصی نیاز ندارد. اما اکثر فیلسوفان و ریاضی‌دانان چنین برداشتی را نمی‌پسندند و معتقدند که ویژگی‌های عمیق‌تری از اثبات ریاضی برای تبیین آن وجود دارد.

1.Contemporary Mathematics: Every Planar Map is Four Colorable
2. Thomas Tymoczko
3. Proof
4. surveyable
5. formalizable

ویژگی دیگر اثبات‌ها، بررسی‌پذیر بودن آنها است. یک اثبات ساختاری است که به وسیله عامل عقلانی قابل بررسی، بازبینی و تأیید است. از این‌رو می‌گوییم که اثبات باید واضح و روشن باشد به طوری که هر فرد آشنا با ریاضیات بتواند آن را با دست بررسی نماید. همین خصیصه سبب می‌شود که اثبات متقاعدکننده باشد و قطعیتی بدان می‌دهد که در علوم دیگر دست یافتنی نیست. بدن سبب قضایای ریاضی پیشینی قلمداد می‌شوند.

آن گونه که در منطق تعریف شده، «اثبات» دنباله‌ای متناهی از فرمول‌های نظریه‌های صوری است که در شرایط معینی صدق می‌کند. به عبارت دیگر اثبات، استنتاجی از اصول موضوع یک نظریه به کمک قواعد منطق است. اکثر ریاضی‌دانان معتقدند که هر اثبات پذیرفته شده‌ای، صوری‌پذیر است. یعنی همواره می‌توان زبان صوری مناسبی یافت که اثبات‌های غیرصوری در آن قابل بیان باشند.

تیموچکو معتقد است که «این بررسی‌پذیری و صوری‌پذیری اثبات‌ها است که سبب اقناع عوامل عقلانی [یعنی انسان‌ها. م] می‌شوند» (Tymoczko , Thomas , 1986: 249)؛ و زمانی که این دو ویژگی توأمان برای اثباتی برقرار است، ریاضی‌دانان در پذیرش آن مشکلی ندارند و غالباً نیز تصور می‌کنند که این دو جنبه همراه یکدیگر وجود دارد، به طوری که وجود یکی، دیگری را لازم می‌سازد. اما آیا همه اثبات‌های بررسی‌پذیر، صوری‌پذیر هم هستند؟ و یا بالعکس، همه اثبات‌های صوری‌پذیر، بررسی‌پذیر هم هستند؟ پرسش اول به وسیله شهودگرایان[1] و گودل[2] مورد چالش قرار گرفته است. شهودگرایان معتقدند که همه اثبات‌های واقعی ریاضی صوری‌پذیر نیستند. از سوی دیگر گودل نشان داد که هر نظریه قضایا و اثبات‌هایی دارد که در آن صوری‌پذیر نیستند بلکه در نظریه‌ای قوی‌تر صوری‌پذیر خواهند بود. به طور خلاصه آنچه که می‌توان نتیجه گرفت این است که «صوری‌پذیری ویژگی موضعی اثبات‌ها است نه ویژگی جهانی آنها» (Ibid. 249).

حال به پرسش دوم برگردیم و ببینیم که تحت چه شرایطی اثبات‌های صوری‌پذیر، بررسی‌پذیر نیستند. تیموچکو معتقد است چنین اثبات‌هایی در صورتی وجود دارند که آنقدر طولانی باشند که ریاضی‌دانان قادر نباشند در مدت عمرشان آنها را بخوانند و بررسی کنند. گرچه از این نمونه اثبات‌ها تاکنون وجود نداشته است اما به لحاظ منطقی وجود آنها در عرصه ریاضیات غیرممکن نیست. در واقع حل مسئله چهار رنگ به وسیله اپل و هیکن اولین نمونه از چنین اثبات‌هایی است. با وجود اینکه اثبات کاملاً صوری است اما به سبب مرا حل طولانی و پیچیده‌اش، توسط ریاضی‌دانان بررسی‌پذیر نمی‌باشد. در واقع «قضیه چهار رنگ معیار بررسی‌پذیری را از صوری‌پذیری جدا می‌کند» (Ibid. 250)

1. Intutionist
2. Godel

یکی دیگر از نتایجی که تیموچکو آن را مورد بررسی قرار می‌دهد، تجربی بودن روش حل مسئله چهار رنگ است. او معتقد است که راه حل اپل و هیکن تنها با کمک کامپیوترها امکان‌پذیر است. چه ما بکارگیری کامپیوترها را یک بخش جدی این راه حل در نظر بگیریم و چه آن را مؤلفه غیرنظری اثبات مسئله بدانیم یعنی مؤلفه‌ای که نمی‌توان آن را بخشی از معرفت ریاضی دانست، در هر حال اثبات این قضیه با مراجعه به آزمایشی که به وسیله کامپیوترها انجام گرفته است بر می‌گردد. به عبارت دیگر اثبات این قضیه بر بستری قرار می‌گیرد که تا اندازه‌ای تجربی می‌باشد و «این کاملاً شگفت‌انگیز است که گزاره‌های ریاضی با توسل به شواهد تجربی اثبات شوند. بنابراین باید برخی از اعتقادات متداول درباره ریاضیات کنار گذارده شود و یا اصلاح گردند» (Ibid. 250).

از جمله تصورات رایج در ریاضیات تصور کانت از ریاضیات است. کانت معتقد بود که قضایای ریاضی گزاره‌های تحلیلی نیستند که صدق آن‌ها صرفاً منوط به اصل عدم تناقض باشد. اما آنها یک تعمیم تجربی نیز نیستند. «قضایای ریاضی خاص همیشه تصدیقات پیشینی هستند نه تجربی، زیرا حاوی مفهوم ضرورت‌اند که از تجربه نمی‌توان اخذ کرد» (به نقل از کاپلستون، ۱۳۷۲: ۲۳۸). یعنی ما صدق آنها را به مدد نوعی شهود در می‌یابیم. گرچه تمام ریاضی‌دانان پس از کانت کاملاً با این تصور موافق نبوده‌اند اما غالباً با این نظر موافق هستند که گزاره‌های ریاضی گزاره‌های تجربی نیستند و برخلاف علوم طبیعی، صدق آنها بر مبنای اثبات‌هایشان قرار دارند نه بر مبنای آزمایشات تجربی. همین ویژگی علوم ریاضی را از علوم طبیعی جدا می‌سازد و بدان قطعیت می‌بخشد.

تیموچکو معتقداست که «قضیه چهار رنگ اولین گزاره ریاضی است که گزاره‌ای پسینی شناخته می‌شود» (Tymoczko,Thomas, 1986: 244). و با به چالش کشیدن تصور پیشینی کانتی از ریاضیات بیانگر آن است که «پذیرش اثبات‌های کامپیوتری از این دست ما را به پذیرش تبیین شبه تجربی از ریاضیات مجبور می‌کند» (Ibid). پس ما باید مفهوم «اثبات» را مورد بازبینی قرار دهیم. ما دو راه در پیش رو داریم یا باید روش جدید اثبات با کامپیوتر را به روش سنتی اثبات اضافه نماییم و یا اینکه مفهوم اثبات را به گونه‌ای تعمیم دهیم که اثبات‌های کامپیوتری را نیز در برگیرد. او روش دوم را ترجیح می‌دهد و در مقاله‌اش می‌کوشد تا چنین مفهومی از اثبات ارائه نماید. تیموچکو معتقد است که چنین تعمیمی از اثبات عامل حرکت ما به سوی «فلسفه‌ای واقع‌گرایانه‌تر از ریاضیات است که به عناصر تجربی و خطاپذیر اجازه ورود به قلمرو ریاضیات می‌دهد» (MacKenzie,Donald, 2001: 143).

تیموچکو معتقد است که قضیه چهار رنگ اعوجاجی در پارادایم حاکم بر ریاضیات است. گرچه وی سعی می‌کند که در مقاله‌اش به گونه‌ای این اعوجاج را رفع نماید اما بر این نکته کاملاً واقف است که چون این اعوجاج سبب تغییر بنیادی‌ترین مفهوم ریاضیات یعنی اثبات می‌شود، شاید در درون پارادایم کلاسیک قابل رفع نباشد و در نهایت به انقلابی پارادایمی در ریاضیات منجر شود. همانطور که پاول

کنین[1] ریاضی‌دان دانشگاه جورج تاون و تامس ستی[2] از دانشگاه پیتزبورگ معتقدند «در واقع متدولوژی اپل - هیکن حاکی از پارادایم جدیدی در ریاضیات است» (Tymoczko,Thomas, 1986: 264).

۳- ریاضیات تجربی

ایده تیموچکو مبنی بر اینکه مفهوم اثبات ریاضیات را آنقدر تعمیم دهیم تا اثبات‌های کامپیوتری را در برگیرد، به تدریج از سوی عده‌ای از ریاضی‌دانان پذیرفته شد. به طوری که در سال ۱۹۹۲ سه ریاضی‌دان با نام‌های دیوید اپستین[3] از دانشگاه وارویک انگلستان، سیلویو لوی[4] از دانشگاه مینوسوتای امریکا و رافائل دُللَیو[5] از دانشگاه تگزاس امریکا مجله‌ای تخصصی با نام «ریاضیات تجربی»[6] تأسیس کردند. آنها در اولین شماره این مجله تخصصی و همچنین در مقاله‌ای با عنوان «آزمایش و اثبات در ریاضیات»[7] که در سال ۱۹۹۵ منتشر شد، به طور مبسوطی هدف خود از انتشار این مجله را بیان کردند. آنها معتقد بودند که ریشه لاتینی کلمه اثبات به دو معنا است: «سعی و آزمون و ورای شک و تردید رفتن و به یقین رسیدن. آنچه که ما ریاضی‌دانان امروزه بدان خو کرده ایم تنها معنای دوم است» (Epstein & Levy, 1995: 670).

همه بر این روش اتفاق نظر دارند که برای اثبات چیزی در زندگی روزانه باید آن را بیازماییم و مورد وارسی و کندوکاو قرار دهیم و درباره آن آزمایش کنیم. «اکثر ریاضی‌دانان نیز همین کار را می‌کنند آنها یک تئوری ریاضی را به یکباره و در خلأ خلق نمی‌کنند بلکه مدت زمان زیادی را صرف تحلیل برخی مسائل خاص می‌کنند. نتایجی که در این میان بدست می‌آورند آنها را به ابداع یک نظریه ترغیب می‌کنند و یا فهم عمیق‌تری از نظریه موجود را در اختیار قرار می‌دهند. به طوری که «کارل فریدریش گاوس[8] اعلام می‌کند که روش او برای رسیدن به حقایق ریاضی آزمایش سیستماتیک است» (Epstein & Levy& de la liave, 1992: 1). با کمی تأمل در تاریخ ریاضیات متوجه می‌شویم که مهمترین پیشرفت‌ها در ریاضیات از کار روی مثال‌هایی خاص بوجود آمده است. مثلاً تئوری سیستم‌های دینامیکی از مطالعه معادلات دیفرانسیل حاصل از رصد ستارگان حاصل شد. یا کشف ساختارهای درختی مجموعه‌های جولیا[9] از مشاهده تصاویری نتیجه شد که به وسیله کامپیوترها تولید شده بودند. اما این بخش از فعالیت دانشمندان نه تنها هیچ‌گاه ضبط و ثبت نمی‌شوند بلکه صحبت از آنها دون منزلت ریاضی شمرده می‌شود. «آنچه که روی کاغذ می‌آید پرتگاه

---

1. Paul C.Kainen
2. Thomas L.Saaty
3. David Epstein
4. Silvio Levy
5. Rafael de la Liave
6. Experimental Mathematics
7. Experimentation and Proof in Mathematics
8. Carl Feridrish Gaous
9. Julia sets

منطقی رعب‌آوری است که تنها کوهنوردی با تجربه آن هم به مدد تجهیزات خاصی ممکن است سعی کند که بدان صعود نماید» (Epstein & Levy,1995:670).

اپستین و لوی سپس می‌پرسند که آیا این کار بهترین چیز برای جامعه پژوهشی است؟ آیا آن برای دانشجویان زیبا است؟ آیا ما باید نقشی را برای ریاضیات قائل شویم که در آن ریاضیات عالی نوعی شعبده بازی است که توسط مردانی خارق‌العاده به طور ناگهانی از هوا پدیدار می‌شود؟ در حالی که آن نتیجه کاری سخت و شهودی است که بر مبنای مطالعه تعدادی موارد خاص قرار گرفته است. ما در نهادهای آموزشی‌مان زمان زیادی را برای نشان دادن این قصرهای منطقی غیرملموس صرف می‌کنیم بجای دادن این احساس به دیگران که آنها هم می‌توانند در این کار مشارکت کنند. «ارزش [ریاضیات] تنها در خود کشف [قضایای ریاضی] نهفته نیست بلکه همچنین در راهی که به آنها منجر می‌شود نیز هست»(Epstein & Levy & de la Liave, 1992: 1, 2) .

اما اپستین و همکارانش جانب احتیاط را فراموش نکردند. آنها به خوبی می‌دانستند که کارشان تمام سنت دو هزار ساله ریاضیات را به چالش می‌کشد بنابراین در مدخل مجله تاکید کردند که «گرچه ما برای روش معمول اثبات قضایا ارزش قائلیم و خود را از نگرش حاکم ـ که یک نتیجه تنها وقتی به عنوان بخشی از معرفت ریاضی است که به وسیله یک اثبات منطقی حمایت گردد ـ جدا نمی‌بینیم اما به نظر ما این غیرعادی است که مؤلفه مهمی از فرایند آفرینش ریاضی از وارد شدن به بحث‌های عمومی پنهان مانده است» (Epstein & Levy& de la liave, 1992: 1). آنها بعدها در ۱۹۹۵ بار دیگر بر این نکته تأکید می‌کنند که «هدف مجله تخصصی ریاضیات تجربی بازی کردن نقشی در کشف اثبات‌های صوری است و نه جایگزین آنها شدن» (Epstein & Levy& de la liave, 1995: 671).

کار اصلی مجله تخصصی ریاضیات تجربی بیان ریاضیات به عنوان موجودی زنده به همراه مثال‌ها، حدس‌ها و نظریه‌ها است که همه این‌ها در تأمل با یکدیگرند و بر هم اثر می‌گذارند (Ibid). مقالاتی در این مجله منتشر می‌شوند که به بررسی جنبه‌های تجربی ریاضیات می‌پردازند. «تجربی» در اینجا به معانی زیر است:

الف – آزمایشاتی که به وسیله کامپیوترها انجام می‌گیرد و هنوز به وسیله مداد و کاغذ امکان‌پذیر نیستند.

ب – آزمایشاتی که به وسیله ساختن مدل‌های فیزیکی در مورد قضایا و مفاهیم ریاضی انجام می‌شوند.

البته باید توجه کرد که ریاضیات تجربی از ریاضیات کاربردی متفاوت است. ریاضیات کاربردی بکارگیری قضایای ریاضی در «جهان واقعی» را بررسی می‌کند. در حالی که ریاضیات تجربی به بیان آزمایش‌های کامپیوتری یا فیزیکی می‌پردازد که سبب ظهور حدس‌ها یا قضایای جدید می‌شوند و یا حدس‌های موجود را تأیید می‌کنند. بنیانگذاران مجله برای اینکه خود را از اتهام غیردقیق بودن رها کنند، تاکید می‌کنند که قواعد سخت‌گیرانه‌ای برای پذیرش مقالات دارند. صرف

بیان یک حدس جدید کافی نیست بلکه باید به طور دقیق و روشن صورت‌بندی گردد و نتایج و کارهای پیشین مرتبط با آن بیان شوند. برنامه‌های کامپیوتری بکار گرفته شده باید آنقدر دقیق باشند که داوران مجله بتوانند آن را بیازمایند.

در پایان سردبیران هدف از تأسیس مجله را عدم انتشار مقالات این چنینی در مجلات تخصصی متداول ریاضی بیان می‌کنند و بر این نکته تأکید می‌ورزند که، مجله تخصصی ریاضیات تجربی سعی در تغییر این وضعیت دارد. ما این مجله را شبیه مجله‌ای در علوم تجربی در نظر می‌گیریم: «تریبون آزادی که آزمایشات ریاضی بتوانند در آن توصیف شوند، حدس‌ها مطرح و تکنیک‌ها مورد بحث قرار گیرند و استانداردها تعیین شوند. ما معتقدیم که تریبون آزادهایی از این دست به توسعه قابل ملاحظه ریاضیات کمک خواهند کرد» (Epstein & Levy& de la liave, 1992: 3, 4).

این مجله تخصصی مورد استقبال ریاضی‌دانانی قرار گرفت که در این زمینه کار می‌کردند. برخی از آنان همچون جان میلنور[1] از برندگان جایزه فیلدز[2] بودند. کار میلنور روی به تصویر کشیدن نگاشت‌های چهار بعدی به وسیله آزمون برش‌های دو بعدی آنها بود که به وسیله کامپیوتر انجام می‌شد. نتایج اولیه کارهای او در مقاله‌ای با عنوان «Remarks on Iterated Cubic Maps» در شماره اول این مجله منتشر شد. طرفداری ریاضی‌دانانی در رتبه و مقام میلنور می‌توانست نقش مهمی در شکل‌گیری پارادایم ریاضیات تجربی داشته باشد. زیرا سبب می‌شد که تعداد بیشتری از ریاضی‌دانان و دانشجویانی که با این اساتید کار می‌کردند و یا به کارهای آنان علاقه‌مند بودند، به این نوع ریاضیات گرایش یابند. که به نوبه خود سبب ادامه فعالیت پژوهشی در حوزه ریاضیات تجربی و انتشار مقالات و کتاب‌های بیشتری در این زمینه می‌شد. این روند، می‌توانست تغییر روز افزون میزان حمایت‌های شغلی و در نهایت استقرار پارادایم نوین در ریاضیات را در پی داشته باشد.

۴- مرگ اثبات

بحران اثبات در ریاضیات با انتشار مجله ریاضیات تجربی و به رسمیت شناختن آن توسط برخی از ریاضی‌دانان مهم پایان نیافت. یک سال پس از انتشار مجله یعنی در ۱۹۹۳ آندرو وایلز[3] طی سه سخنرانی در ۲۱، ۲۲و ۲۳ ژوئن در انستیتوی علوم ریاضی نیوتن در دانشگاه کمبریج، اثباتی از آخرین قضیه فرما ارائه کرد. در قرن هفدهم فرما[4] ریاضی‌دان فرانسوی در حاشیه نسخه‌ای از کتاب *دیوفانتوس* چنین می‌نویسد: «تجزیه یک مکعب به مجموع دو مکعب، یک توان چهارم به مجموع دو

1. John Milnor
۲. جایزه فیلدز Fields Medal مهمترین جایزه جهانی در حوزه ریاضیات که به نوبل ریاضی مشهور است.
3. Andrew J.Wiles
4. Fermat

توان چهارم، یا به طور کلی هر توان دلخواه به مجموع دو توان با قوه‌های همانند ولی بزرگتر از دو غیرممکن است، و من به طور یقین برهان تحسین‌آمیزی برای آن یافته‌ام اما این حاشیه تنگتر از آن است که گنجایش درج آن را داشته باشد» (ایوز،هاوردو ،۱۳۶۸: ۵۴). به عبارت دیگر اعداد صحیح مثبتی مانند X, Y, Z, n وجود ندارند که به ازای $n > 2$ در تساوی $X^n + Y^n = Z^n$ صدق کنند.

از آنجا که هیچ برهانی از فرما در آثار دیگرش در مورد این قضیه یافت نشد این حدس به آخرین قضیه فرما مشهور شده است. بسیاری از برجسته‌ترین ریاضی‌دانان همچون اویلر، لژاندر، دیریکله، لامه و کومر مهارت خود را در این مسئله آزمودند اما این حدس در حالت کلی همچنان لاینحل باقی ماند، تا اینکه وایل ریاضی‌دان دانشگاه پرینستون، پس از هفت سال کار توانست اثباتی برای آن ارائه کند. به همین سبب این اثبات واقعه مهمی در جامعه ریاضی‌دانان به شمار می‌رفت.

چهار ماه بعد جان هورگون[1] نویسنده ارشد «ساینتیفک امریکن»[2] در مقاله‌ای با عنوان «مرگ اثبات» شعف و شادمانی جامعه ریاضی‌دانان را از اثبات وایلز این گونه به تمسخر می‌گیرد: «اثبات وایلز به دویست صفحه می‌رسد و متخصصان تخمین می‌زنند که اگر وایلز تمام جزئیات آن را بیان می‌کرد این اثبات می‌توانست پنج برابر طولانی‌تر از این باشد. ناظری معتقد بود که تنها یکدهم درصد جامعه ریاضی‌دانان شایستگی و توانایی ارزیابی این اثبات را دارند. در واقع پذیرش ادعای وایلز به خاطر شهرت او و شهرت کارهای قبلی‌اش بود. با این وجود ریاضی‌دانانی که هنوز جزئیات اثبات اورا نیازموده بودند نظر دادند که این اثبات «زیباست و رگه‌هایی از حقیقت دارد» (Horgan, John, 1993: 76). «شنوندگان وایلز چون هیچ غول بی‌شاخ و دم دیگری را در جلسه سخنرانی نمی‌دیدند، مراتب قدردانی خود را با کف زدن نشان دادند» (Ibid. 75).

وایلز برای ارزیابی اثباتش از یکی از همکارانش به نام نیک کاتز کمک خواست. آنها در بازبینی اثبات به ایرادی برخوردند، سپس همراه دانشجوی پیشین خود ریچارد تیلور یک سال برای اصلاح اثبات وقت صرف کرد و سرانجام در سپتامبر ۱۹۹۴ آنها اثبات نهایی و صحیح را ارائه کردند. پرسش مهمی که در اینجا مطرح می‌شود این است که ارائه چنین اثبات‌های پیچیده و طولانی که تنها عده‌ای با صرف زمانی طولانی قادر به ارزیابی آن هستند، به چه درد می‌خورد در صورتی که ما می‌توانیم برای مراتب خیلی بالا از n درستی حدس فرما را نشان دهیم؟ وایلز پاسخ می‌دهد: «ریاضی‌دانان می‌دانند که هیچ جوابی تا چهار میلیون یا چهار بیلیون برای این مسئله وجود ندارد. اما آنها به این راضی نیستند. آنها می‌خواهند واقعاً بدانند که هیچ جوابی تا بی‌نهایت وجود ندارد».[3] اما باید توجه کرد که بهای چنین قطعیتی ارائه اثبات‌های

1. John Horgan
2. Scientific American
3. Wiles interviewed by NOVA. (Solving Fermat And Andrew Wiles) http://www.pbs.org/wgbh/nova/proof/wiles.html

طولانی و پیچیده‌ای است که ارزیابی آنها بسیار مشکل است و عده کمی توانایی آن را دارند و تازه وقتی همین عده کم به ارزیابی اثبات می‌پردازند به سبب فرایند پیچیده و طولانی اثبات باز هم معلوم نیست که آیا نکته و ایرادی در فرایند بررسی آن از قلم افتاده است یا نه. بنابراین باز نمی‌توانیم بگوییم که اثبات درست است. به عبارت دیگر ما برای قطعیت بخشیدن به یک قضیه آن را اثبات می‌کنیم اما اثبات ما آنقدر پیچیده است که در بررسی و ارزیابی آن با عدم قطعیت مواجهیم. در واقع ما در یک دور گرفتار شده ایم. پس آیا بهتر نیست که به جای اثبات‌های کلاسیک رو به سوی اثبات‌های کامپیوتری آوریم؟

هورگون در مقاله‌اش سعی کرده است که با استناد به نظرات عده‌ای از ریاضی‌دانان به ویژه برندگان جایزه فیلدز، نشان دهد که اثبات‌های پیچیده و اثبات‌هایی که بدون کامپیوتر امکان‌پذیر نبودند (مثل قضیه چهار رنگ) در سال‌های اخیر گرایش ریاضی‌دانان را به سوی اثبات‌های تجربی (کامپیوتری یا با مدل‌های فیزیکی) جلب کرده است. به طوری که کنیث دولین[1] که نویسنده ستونی برای مجله تخصصی انجمن ریاضی امریکا است می‌گوید: «من فکر می‌کنم که در پنجاه سال آینده از اهمیت اثبات در ریاضیات کاسته خواهد شد. شما تعداد روز افزون کسانی را خواهید دید که کار ریاضی می‌کنند بدون اینکه به انجام اثبات‌های ریاضی نیاز داشته باشند» (Horgan, John, 1993: 76) . هورگون معتقد است که نهادهای قدرت و ثروت این ارتداد در مقابل ریاضیات کلاسیک را رواج داده‌اند. مثلاً در سال‌های اخیر بنیاد علم ملی[2] در امریکا ریاضی‌دانان را تشویق کرده است که با علوم کامپیوتر و حوزه‌های کاربردی دیگر تلائم بیشتری داشته باشند. یکی از نمایندگان این بنیاد در دانشگاه واشنگتن اعلام کرد که این بنیاد از این پس نمی‌تواند به ادامه حمایت از ریاضیاتی بپردازد که هدف و سوی مشخصی ندارد. استیون کرانتز[3] از ریاضی‌دانان همان دانشگاه در مقابل این اظهارات به شدت واکنش نشان داد و گفت: «ما می‌توانیم در برابر این نگرش بایستیم و بگوییم که غلط است» اما ریاضی‌دانان آدم‌های بی‌عرضه و بی‌بخاری هستند و سنت مقابله با این اظهارات را ندارند» (Ibid). او از این وضع ناراحت است که «در بعضی جلسات بدست آوردن بودجه برای خرید سخت‌افزارهای تولید تصاویر فراکتالی راحت‌تر از بدست آوردن بودجه برای مطالعه هندسه جبری است» (Horgan, John, 1993: 79).

هورگون سپس به بیان نظرات ویلیام ترستون[4] می‌پردازد. ترستون به دلیل ایجاد ارتباط میان دو بخش توپولوژی و هندسه، در سال ۱۹۸۲ جایزه فیلدز برد. او معتقد است: «اینکه ریاضیات در اصل قابل تحویل به اثبات‌های صوری می‌باشد ایده سست و ضعیفی است» (Ibid. 80). به ویژه در قرن حاضر. او متأثر از کارهای تامس کوهن، فیلسوف علم معاصر[5]، معتقد است: «ریاضی‌دانان در عمل قضایای ریاضی

1. Keith Devlin
2. National Science Foundation
3. Steven G. Krantz
4. William P. Thurston
۵. تامس کوهن مشهورترین و پر نفوذترین فیلسوف و مورخ علم معاصر است که نظریه پارادایمی او تحولی جدید در علم شناسی فلسفی بوجود آورد.

را در یک محتوی اجتماعی ثابت می‌کنند و ریاضیات مجموعه‌ای از معرفت‌ها و تکنیک‌هایی است که از نظر اجتماعی مقید می‌باشند» (Ibid). بنابراین مهم است ببینیم چه شرایط و وضعیت اجتماعی در عصر ما سبب شده که چنین مناقشه‌ای در ریاضیات رخ دهد؟

هورگون معتقد است که در عصر ما کل معرفت بشری به چالش گرفته شده است و بنابراین خلاف انتظار نیست که بگوییم «اکنون شک و تردیدهای غرق‌کننده تفکر انسان مدرن در نهایت ریاضیات را نیز تحت تأثیر قرار داده است». پس در حالی که کامپیوترها روش کشف، اثبات و ایده‌های ارتباطی ریاضی‌دانان را دگرگون می‌سازند آیا باز هم جایی برای قطعیت مطلق در این جهان جدید بی‌پروا وجود دارد؟ و آیا به نظر نمی‌رسد که «اثبات آخرین قضیه فرما آخرین نفس‌های این فرهنگ در حال اهتزار است؟» (Ibid. 75).

مقاله «مرگ اثبات» جنجال زیادی را بوجود آورد یکی از کسانی که به آن واکنش شدیدی نشان داد استیون کرانتز بود. او در ستون آزاد مجله تخصصی (Notices of The American Mathematical Society) چنین نوشت: «آشکار است که هورگون مصاحبه‌هایش با برخی ریاضی‌دانان را به طور ناقص فهمیده است. او از آنچه که فکر می‌کرده شنیده تصویر موزونی رسم کرده است. تکه‌هایی از مصاحبه‌های مختلف را کنار هم قرار داده و به صورت یک بافته عجیب و غریب که هیچ پایه‌ای در واقعیت ندارد در آورده است. این مهم نیست که به چه دلیلی این مقاله چاپ شده بلکه من فکر می‌کنم که ایده‌های بیان شده خطرناکند: خطرناک برای من، برای شما و برای موضوع و حرفه ما» (Krantz , Steven G, 1994: 10).

کرانتز معتقد است هنگامی که هندسه نااقلیدسی ارائه شد هیچکس آن را نمی‌فهمید اما اکنون حتی بچه‌های دبیرستان نیز آن را می‌آموزند. بنابراین پیچیده بودن اثبات وایلز بدین معنی نیست که اصولاً قابل فهم نیست. بلکه با گذشت زمان همانند بسیاری از قضایای دیگر اثبات‌های ساده‌تری برای آن ارائه خواهد شد که برای نسل‌های بعدی قابل فهم خواهد بود. بنابراین ادعای هورگون که پیچیده بودن و مشکل فهم بودن اثبات‌هایی همچون اثبات وایلز به معنی مرگ اثبات‌های سنتی است، ادعای گزافی است. در واقع پارادایم ریاضیات کلاسیک که دوهزار و پانصد سال قدمت دارد به ریاضی‌دانانی همچون کرانتز که در آن آموزش دیده‌اند این اطمینان را می‌دهد که با گذشت زمان این مشکل نیز همانند مشکلات دیگر حل خواهد شد.

کرانتز معتقد است به سبب مشکل بودن ریاضی واضح است که عموم مردم، نمایندگان مجلس امریکا و حتی دانشجویان گرایش دارند که ریاضیات را با برنامه‌های کامپیوتری که ساده‌تر هستند، مطالعه کنند و تأمین‌کنندگان مالی پژوهش‌های علمی نیز از این برنامه‌های کامپیوتری که زودتر ثمر می‌دهند، حمایت می‌کنند. البته کرانتز معتقد است که برنامه‌های کامپیوتری بی ارزش نیستند زیرا

آنها می‌توانند در مراحل اولیه حل یک مسئله انگیزه‌بخش باشند و در ارتباط میان ایده‌های ریاضی بکار روند اما آنها نمی‌توانند جایگزین اثبات شوند و کارکرد آنها را داشته باشند.

به نظر می‌رسد آنچه کرانتز را بسیار هراسان کرده تعلقات حرفه‌ای و کاری او در جامعه ریاضی‌دانان است. او می‌بیند که اگر اثبات‌های کامپیوتری به عنوان اثبات‌هایی معتبر وارد عرصه ریاضیات شوند دیگر جایی برای ریاضی‌دانانی مثل او نخواهد بود. «دایناسورهایی (مثل خودم) که به سنت ریاضی چسبیده‌اند» (Ibid). بنابراین او سعی دارد با تلنگر به جامعه ریاضی آنها را بیدار سازد. گرچه او نسبت دادن «آدم‌های بی‌عرضه و بی‌بخار» به ریاضی‌دانان را که هورگون در مقاله‌اش از او نقل قول کرده، نادرست می‌داند اما از اینکه چنین نقل قول نادرستی کاتالیستی بود تا تعدادی از ریاضی‌دانان نسبت به مقاله (مرگ اثبات) واکنش نشان دهند و از ریاضیات سنتی دفاع کنند، احساس رضایت می‌کند. در پایان کرانتز همچون سیاستمداری که حزبش در خطر است، خطابه‌ای مهیج برای جامعه ریاضی‌دانان بیان می‌کند و نسبت به خطری که آنها را تهدید می‌کند چنین هشدار می‌دهد: «گرگ‌ها در میان ما هستند و اکنون همان زمانی است که باید تصمیم بگیریم که به چه چیز معتقدیم و چه چیزی برای ما ارزشمند است. از پیامدهای بحث‌هایی از نوع مقاله مجله (ساینتیفیک امریکن)، این است که به طرز باور نکردنی به نظر می‌آید که برخی از گرگ‌ها از خود ریاضی‌دانان هستند. اما گرگ‌ها خطرناکند. آنها بر رسانه‌ها و بر آژانس‌های مالی تأثیر دارند. ما باید از خطراتی که بیرون از صومعه‌مان است آگاه باشیم. شاید این درست یا نادرست باشد که ده یا پانزده سال دیگر اثبات‌ها محو شوند و کامپیوترها جایگزین آنها شوند و درباره آنچه که احتمالاً درست است سخن بگویند. اما ده یا پانزده سال دیگر برای تصمیم گرفتن در مورد اینکه چه می‌خواهیم دیر خواهد بود. ما باید امروز تصمیم بگیریم» (Ibid. 12, 13).

۵- اثبات یا اجماع

همانطور که دیدیم درسال ۱۹۷۶ راه حلی برای مسئله چهار رنگ ارائه شد. مسئله‌ای که صد سال فکر و اندیشه ریاضی‌دانان را به خود مشغول کرده بود. از این‌رو ارائه چنین راه حلی از اهمیت ویژه‌ای برخوردار بود. اما مشکل این بود که این راه حل یک اثبات کامپیوتری بود. یعنی اثباتی بود که به سبب تعداد بسیار زیاد حالات مورد بررسی به وسیله ریاضی‌دانان قابل بررسی نبود و تنها ماشین یعنی کامپیوتر قادر بود که آنها را بررسی نماید. موضوع مورد مناقشه این بود که از زمان یونان باستان تاکنون، اثبات‌های ارائه شده در ریاضیات به وسیله ریاضی‌دان‌ها بررسی‌پذیر بوده‌اند اما اثبات‌های کامپیوتری این ویژگی را ندارند و تنها دارای خصلت صوری‌پذیری اثبات‌ها هستند (ویژگی که پس از شکل‌گیری مکتب صورت‌گرایی جز خصلت‌های لاینفک اثبات قرار گرفته است). در این صورت

آیا باز هم می‌توان اثبات‌های کامپیوتری را یک اثبات ریاضی دانست؟ آیا اصولاً احتیاجی هست که اثبات‌ها بررسی‌پذیر باشند؟

اگر «اثبات» را قلب فعالیت ریاضی بدانیم حل کامپیوتری قضیه چهار رنگ آن را مورد هدف قرار داده است و از این‌رو اعوجاجی جدی و مشکل‌زا محسوب می‌شود. این روش اثبات قضایای ریاضی طرفدارانی در میان ریاضی‌دانان پیدا کرد و آنان با تأسیس مجله تخصصی (ریاضیات تجربی)، در سال ۱۹۹۲، پایگاهی برای بیان و توسعه فعالیت‌های پژوهشی خود ایجاد کردند. استقبال برخی از ریاضی‌دانانی که جایزه فیلدز برده بودند و دارای شأن و مقام مرجعیت در جامعه ریاضی بودند سبب شد که این مجله مورد توجه ریاضی‌دانان بیشتری قرار گیرد. با اثبات پیچیده و طولانی وایلز از قضیه فرما در سال ۱۹۹۳ که تنها تعداد معدودی از ریاضی‌دانان قادر به ارزیابی آن بودند بار دیگر کارایی اثبات‌های سنتی در ریاضیات مورد پرسش قرار گرفت و برمزیت اثبات‌های کامپیوتری تأکید شد.

هم اکنون دو گروه رقیب در جامعه ریاضی وجود دارند. گروه اکثریت را ریاضی‌دانان کلاسیک و گروه اقلیت را طرفداران ریاضیات تجربی تشکیل می‌دهند. آیا معیاری برای داوری میان نظرات این دو گروه وجود دارد؟ چنین معیاری باید تعریفی از اثبات ریاضی ارائه کند که ورای آرای مختلف ریاضی‌دانان باشد تا ریاضی‌دانان با تمسک به آن معنا بتوانند آرای خود و دیگران را مورد قضاوت قرار دهند و بگویند که کدامین راه حل یک اثبات تلقی می‌شود. اما آیا چنین تعریف و معنایی از اثبات ریاضی وجود دارد؟ آیا اصولاً چنین تعریفی امکان‌پذیر است؟

برای دو هزار سال «اثبات» در ریاضیات به معنای اثبات به روش هندسی بود. با ابداع نمادهای جبری و طرح هندسه تحلیلی در قرون شانزدهم و هفدهم، دیگر لزومی به ارائه ترسیمات هندسی در اثبات‌ها نبود و اثبات‌های جبری جایگزین اثبات‌های هندسی شدند. با انقلاب نااقلیدسی در اواخر قرن نوزدهم، این نمادگرایی به سوی عاری کردن اثبات‌ها از هر نوع محتوای شهودی پیش رفت و سبب ظهور صورت‌گرایی در اوائل قرن بیستم شد. گرچه شهودگرایی براوری سعی کرد تا بار دیگر شهود (البته شهود زمانی نه هندسی) را به ریاضیات برگرداند اما نگرش وی به ریاضیات مورد استقبال جامعه علمی قرار نگرفت. به تدریج صورت‌گرایی پارادایم حاکم بر ریاضیات قرن بیستم شد. اکنون وقتی گفته می‌شود یک قضیه ریاضی اثبات شده است یعنی آن قضیه به شیوه‌های کاملاً جبری – صوری ثابت شده است. وقتی به سراغ کتاب‌های ریاضی محض می‌رویم تنها با ساختارهای جبری – صوری مواجهیم. در این کتاب‌ها (حتی اگر به حوزه‌هایی مثل آنالیز، هندسه، هندسه دیفرانسیل، هندسه جبری یا توپولوژی متعلق باشند) دیگر از ترسیمات شهودی هندسی خبری نیست و اگر هم در برخی جاها استفاده می‌شود تنها به عنوان یک روش آموزشی بکار گرفته می‌شود نه به عنوان روشی برای اثبات قضایا.

آنچه که در این میان مهم است این است که تمامی انواع اثبات‌های بکار گرفته شده در دو هزار سال گذشته دارای ویژگی بررسی‌پذیری بوده‌اند و ویژگی صوری‌پذیری تنها در قرن بیستم جزء لاینفک ویژگی‌های اثبات ریاضی برشمرده می‌شود. اکنون در زمان حاضر مشاهده می‌کنیم که اثبات‌های کامپیوتری نه این ویژگی متأخر یعنی صوری‌پذیری را بلکه ویژگی بررسی‌پذیری را که از زمان پیدایش ریاضیات با آن همراه بوده است به گونه‌ای که اثبات بدون در برداشتن آن قابل تصور نیست را به چالش طلبیده است. در این صورت آیا می‌توان یک ویژگی خاص برای اثبات در نظر گرفت که در همه اعصار همچنان ثابت باقی مانده باشد؟

همانطور که می‌بینیم «اثبات» آن گونه که معمولاً تصور می‌شود مفهومی صلب، مطلق، ازلی و ابدی ندارد. تصور ریاضی‌دانان از آنچه یک اثبات را قابل پذیرش می‌کند همواره در حال تغییر است. مایکل عطیه، برنده جایزه فیلدز، معتقد است: «وقتی مردم از نقطه نظر فلسفی، منطقی محض به ریاضیات می‌نگرند؛ تنها وجه کوچکی از آن را می‌بینند. یک گام در استدلال ریاضی، قیاسی یک خطی نیست؛ آن در واقع کپسول فشرده‌ای از صد سال ریاضیات است که در یک کلمه خلاصه شده است. ... بنابراین مقداری از جامعه‌شناسی در ریاضیات وجود دارد. آنچه که در زمان معینی به عنوان حکمی که مردم فکر می‌کنند فهمیده‌اند، قابل پذیرش است؛ در طول زمان تغییر می‌کند» (Mackenzie, Donald, 2001: 318). هیچ تعریف جامع و مانعی برای اثبات وجود ندارد. یعنی هیچ وجه مشخصه یگانه‌ای نیست که به عنوان جوهر «اثبات» در نظر گرفته شود. در واقع ما در برابر این پرسش که «اثبات چیست؟» تنها می‌توانیم به نمونه‌هایی از اثبات اشاره کنیم.

حال این پرسش مهم مطرح می‌شود که چگونه ریاضی‌دانان روش حل خاصی را یک اثبات ریاضی تلقی می‌کنند؟ در مناقشه اثبات کامپیوتری چه چیزی سبب شد تا عده‌ای از ریاضی‌دانان اثبات به روش کامپیوتری را یک اثبات ریاضی تلقی کنند؟ در پارادایم کلاسیک ریاضیات «اثبات» دارای دو مقومه اساسی بود: بررسی‌پذیری و صوری‌پذیری. اگر اثبات کامپیوتری هیچ یک از این دو ویژگی را نداشت هیچ‌گاه نمی‌توانست به عنوان یک اثبات ریاضی تلقی شود. اما این اثبات دارای ویژگی صوری‌پذیری بود از این‌رو جامعه ریاضی نمی توانست آن را بی‌ارتباط با حوزه اثبات در ریاضیات بداند. اما عوامل دیگری همچون بکارگیری سریع این گونه اثبات‌ها برای اهداف عملی، آسان شدن آموزش ریاضی و در نتیجه حمایت‌های مالی از آن ،که در خارج حوزه ریاضیات قرار داشتند نیز نقش مهمی در این داشتند تا عده‌ای از ریاضی‌دانان در تعامل با یکدیگر به اجماعی جمعی در پذیرش اثبات‌های کامپیوتری به عنوان اثباتی ریاضی برسند و مجله‌ای تخصصی تأسیس کنند و در آن به بیان آرای خود بپردازند. بررسی چنین عواملی مستلزم فهم ارزش‌هایی است که جامعه ریاضی بدان‌ها ارج می‌نهد و بنابراین شناخت آن انتخاب‌ها مستلزم پژوهشی جامعه‌شناختی است.