فلسفهٔ صوری‌گرایی ریاضیات

(Formal philosophy of Mathematics)

دکتر حسین سیفلو

دانشکده ریاضی دانشگاه تبریز

مقدمه

«ریاضیات، از زمان افلاطون به سوی تفکر فلسفی کشیده شده است. بسیاری از فیلسوفان بزرگ از آن زمان تا به امروز حداقل چیزی برای گفتن دربارهٔ ریاضیات دارند. این به دلیل اهمیت ریاضیات در زندگی بشر نیست، کشاورزی حداقل به اندازهٔ ریاضیات در زندگی بشر مهم است، امّا هیچ فلسفهٔ کشاورزی وجود ندارد. این استخوان بندی مختص مسایل فلسفی است که توجه فلسفه را به سوی ریاضیات جلب می‌کند.» [از مقدمهٔ پروفسور و.د.هارت برای کتاب ۸].

در تأیید و توضیح نظریه فوق به مواردی چند اشاره می‌شود.

افلاطون معتقد بود که مفاهیم ریاضی از تجربهٔ حسّی اخذ نشده بلکه از بدو تولّد با ما هستند. زیرا ما، در «حیات قبلی» دارای نوعی تماس بی واسطه با موجودات ریاضی بوده‌ایم. در حیات کنونی، کار ما تنها یادآوری آن آموخته‌های پیشین است.

ارسطو، برعکس افلاطون، معتقد بود که مفاهیم ریاضی تنها در مصادیق‌شان وجود دارند. بنابراین ما، در ریاضیات دربارهٔ همین عالم فیزیکی خارج صحبت می‌کنیم، منتها به صورت کلی‌تر و انتزاعی‌تر. به علاوه، معرفت ریاضی محصول تجربه و استقراء است. ابن‌سینا نیز ریاضیات را علمی وابسته به ماده می‌داند.

در قرون وسطی موجودات ریاضی را از جنس کلیات می‌دانستند، اما تصوّرات متفاوتی از آن‌ها داشتند.

دکارت، لاک و هیوم موجودات ریاضی را از سنخ ایده‌ها و مفاهیم ذهنی می‌دانستند، اگرچه دربارهٔ نحوهٔ حصولشان آراء متفاوتی داشتند. دکارت این مفاهیم را فطری می‌دانست در حالی که لاک و هیوم آن‌ها را محصول انتزاع از تجربه می‌دانستند.

علاقهٔ اصلی کانت به متافیزیک و امکان آن به عنوان یک علم ماقبل تجربی بود، و ریاضیات برای او موردی روشنگر در این زمینه به شمار می‌رفت. او معتقد بود که ما زمان و مکان را مستقل از تجربه، و در نتیجه به صورت ماقبل تجربه، درک می‌کنیم و حساب و هندسه علومی هستند که، به ترتیب، بر شهود ماقبل تجربی ما از زمان و مکان بنا شده‌اند.

جان استوارت میل درصدد احیای سنت تجربه گرا در تبیین معرفت ریاضی بود. به نظر او کلیهٔ قضایای ریاضی محصول تجربه و استقراء هستند.

آراء میل هدف نقادی‌های تیز و تند فیلسوف و ریاضیدان آلمانی گوتلوب فِرِگه قرار گرفت. از نظر فرگه عدد نمی‌تواند یک صفت فیزیکی (مانند سرخی) باشد. زیرا به موجودات ذهنی و مجرد، که فاقد خصوصیات فیزیکی هستند، نیز تعلق می‌گیرد. بنابراین ریاضیات، از جمله عدد، از تجربه حاصل نمی‌شود.

بدین ترتیب تقریباً همهٔ فیلسوفان، حتی فلاسفهٔ نیمه دوّم قرن بیستم، در مورد ریاضیات نظریاتی ارائه داده و یا آن را به عنوان یک مثال مناسب و روشنگر در بحث‌های خود به کار برده‌اند. آنچه که مورد نظر ما است توضیح یکی از فلسفه‌های ریاضی است.

فلسفهٔ ریاضیات چیست؟ «یک فلسفهٔ ریاضیات اساساً عبارت است از بازسازی مجدّدانه‌ای که در آن به تودهٔ عظیم امّا بی‌نظم معرفت ریاضی، که طی سالیان متمادی برروی هم انباشته شده، نظم خاصی داده شود.» [۱. ص ۳۲۱].

بنابراین فلسفه تابعی از زمان است، و فلسفهٔ خاصی ممکن است با گذشت زمان منسوخ یا در پرتو تجارب بیشتر تغییر یابد. با این دیدگاه اگر فقط فلسفه‌های معاصر ریاضی را در نظر بگیریم، می‌توانیم بگوییم که در حال حاضر سه فلسفهٔ ریاضی عمده وجود دارد: فلسفهٔ منطق گرا، که مفسرین عمدهٔ آن برتراند راسل و گوتلوب فرگه بودند، معتقد است که ریاضیات

بخشی از منطق است. فلسفهٔ شهودگرا، که توسط براوئر و شاگردان او پایه‌گذاری شد، معتقد است که ریاضیات را باید منحصراً به توسط یک تعداد متناهی از روشهای سازنده از دنباله اعداد طبیعی که به طور شهودی در نظر گرفته شده‌اند، بنا کرد. و بالاخره فلسفه صوری گرا، که عمدتاً توسط هیلبرت به وجود آمد، ریاضیات را به صورت دستگاههای نمادی صوری می‌بینند. ما در این مقاله سعی می‌کنیم نظریهٔ صوری‌گرا را به زبان ساده که قابل استفاده برای عموم باشد توضیح دهیم. البته علاوه بر این سه مکتب فلسفه‌های جدیدتری نیز وجود دارد که در این جا به آن‌ها اشاره نمی‌کنیم.

مکتب صوری گرایی در ریاضیات

هدف این مکتب، همانند مکاتب دیگر، پاسخ به این سؤال است که «ریاضیات چیست؟» همان طور که در بالا ذکر شد، فلسفه سعی می‌کند به توده‌ای بی‌نظم از اطلاعات، که البته مشترکاتی هم دارند، مثلاً همین مجموعهٔ اطلاعاتی که «ریاضیات» نامیده می‌شوند، نظم خاصی بدهد و آن را به طور کلی تبیین کند. مجموعهٔ اطلاعات و چیزهایی که ریاضیات نامیده می‌شوند یعنی چه، اصل و ذات اینها چیست؟ برای روشن شدن سؤال مثالی می‌آوریم. اگر گفته شود علم پزشکی چیست، جواب روشن است. این علم با سلامت و بیماری انسان‌ها سر و کار دارد و هدفش از بین بردن بیماری و حفظ سلامت انسان‌ها است. هر چیزی که موجب بیماری می‌گردد و راه‌های درمان آن موضوع بحث علم پزشکی است. بیماری و سلامت تعاریف روشن و ساده‌ای دارند که همان معنی لغوی آن‌ها است. امّا این که عدد چیست؛ نقطه، خط و صفحه به تعبیر ریاضی یعنی چه؛ مستلزم تمهید مقدمات و پایه‌ریزی بسیار دقیق و اصولی است تا جواب‌های ما به نتایج متناقض منجر نشود. نمی‌توان به آنچه که اقلیدس گفته قانع شد: نقطه آن است که هیچ جزء ندارد، خط طول بدون عرض است، صفحه آن است که تنها طول و عرض دارد. «هیچ جزء ندارد» یعنی چه، طول و عرض چگونه تعریف می‌شوند. یک فلسفه باید به همهٔ این پرسشها پاسخ داشته باشد. یک فلسفهٔ ریاضی علاوه بر این که ریاضیات را به عنوان یک کل تبیین می‌کند، اجزای آن را نیز تعریف و مشخص می‌کند. فلسفه

در جستجوی روابط بین اشیائی است که در حالت عادی شباهتی بین آنها متصور نیست، و نیز در پی تفاوت‌های اساسی بین چیزهایی است که در حالت عادی یکسان تلقی می‌شوند، در واقع فلسفه بیان نظریه‌ای است در باب ماهیت چیزها.

بنابراین، ماهیّت ریاضیات چیست، ماهیّت نقطه، خط، عدد، مجموعه، تابع، جمع، معادله و... کدام است، این‌ها سؤالهایی است که سعی می‌کنیم جواب آن‌ها را از نظر یک ریاضیدان صوری گرا بدانیم.

مکتب صوری‌گرا می‌گوید: ریاضیات مجموعه‌ای است از مباحث مجرد که در آن اصطلاحات ریاضی صرفاً نمادهایی هستند بدون معنی خاص اولیه و احکام ریاضی قواعدی متضمن این نمادها؛ پایهٔ غایی ریاضیات در مجموعه‌ای از نمادها یا نشانه‌ها و در مجموعه‌ای از اعمال روی این نشانه‌ها واقع است. لذا ریاضیات عاری از محتوای ملموس و تنها شامل عناصر نمادی آرمانی است.

در مکتب صوری‌گرا بحث اصل موضوعی در بیشترین حد دنبال می‌شود. بدون آشنایی کافی با مبحث اصل موضوعی عملاً امکان درک مفاهیم مکتب صوری‌گرایی وجود ندارد. لذا در این جا مختصری راجع به اصل موضوعی بحث می‌کنیم.

برای این که حکمی در یک دستگاه قیاسی اثبات شود، باید نشان داد که این حکم پیامد منطقی لازم از چند حکم دیگر است که قبلاً درستی آن‌ها به اثبات رسیده‌اند. حکم‌های اخیر، به نوبهٔ خود، باید به کمک احکامی که قبلاً اثبات شده‌اند، ثابت شوند، و به همین ترتیب الی آخر. چون این عمل را نمی‌توان به طور نامحدود ادامه داد، باید در بدو امر مجموعه‌ای از حکم‌ها بدون اثبات پذیرفته شوند. این حکم‌های اولیهٔ پذیرفته شده را اصول موضوعی مبحث مورد نظر می‌نامند؛ تمام احکام دیگرِ مبحث بایستی به طور منطقی از این *اصول موضوعی* استنتاج شوند.

همچنین، تعریف صریح همهٔ اصطلاحات فنیِ یک مبحث همانقدر غیر ممکن است که اثبات کلیهٔ احکام آن؛ زیرا یک اصطلاح فنی را باید به کمک سایر اصطلاحات فنی تعریف کرد، و این اصطلاحات را توسط اصطلاحات دیگر، و الی آخر. برای رفع این مشکل و به منظور احتراز از دوری بودن مجبوریم در مقدمهٔ مبحث مجموعه‌ای از *اصطلاحات اولیه* یا

اساسی را در نظر بگیریم و معانی آن‌ها را مورد پرسش قرار ندهیم، تمام اصطلاحات فنی دیگر مآلاً باید به کمک این اصطلاحات اولیه تعریف شوند.

با این دو فرض می‌توان گفت: اصول موضوعی یک مبحث، احکام پذیرفته شده‌ای دربارهٔ اصطلاحات اولیه‌اند. به عنوان مثال در اوایل قرن بیستم هیلبرت برای هندسهٔ اقلیدسی مجموعه‌ای شامل ۶ اصطلاح اولیه و ۲۱ اصل موضوعی پیشنهاد کرد، همچنین پیری مجموعه‌ای شامل ۲ اصطلاح اولیه و ۲۰ اصل موضوعی برای هندسه قرار داد. اصطلاحات اولیهٔ هیلبرت، نقطه، خط مستقیم، صفحه، بر، همنهشتی، و بین هستند؛ اصطلاحات اولیه مجموعهٔ پیری عبارتند از نقطه و حرکت.

روشن است که نمی‌توان هر مجموعه‌ای از احکام دربارهٔ اصطلاحات اولیه را به عنوان مجموعهٔ اصول موضوعی اختیار کرد. مجموعهٔ اصول موضوعی باید مشروط به بعضی از ویژگیها و مقیّد به برخی دیگر باشند. مثلاً ضروری است که اصول موضوعی *سازگار* باشند، یعنی هیچ تناقضی را نتوان از آن‌ها نتیجه گرفت. حال سازگاری خود چه گونه قابل بررسی است. موفق‌ترین روشی که تاکنون برای اثبات سازگاری یک مجموعهٔ اصول موضوعی ابداع شده است، روش مدل‌ها است. یک مدل برای یک مجموعهٔ اصول موضوعی هنگامی به دست می‌آید که بتوانیم به اصطلاحات اولیهٔ این مجموعه معانی (جمع معنی) نسبت دهیم که اصول موضوعی را به احکام درستی دربارهٔ مفاهیم نسبت داده شده تبدیل کنند. دو نوع مدل وجود دارد، *مدل ملموس* و *مدل آرمانی یا نسبی*.

یک مدل را زمانی ملموس می‌نامند که معانی منسوب به اصطلاحات اولیه اشیاء مأخوذ از دنیای واقعی باشند. در حالی که در مدل آرمانی معانی منسوب به اصطلاحات اولیه، چیزها و روابطی مأخوذ از یک مبحث اصل موضوعی دیگری است. وقتی یک مدل ملموس ارائه می‌شود، در واقع سازگاری مطمئنی برای دستگاه اصل موضوعی خود به وجود آورده‌ایم، زیرا در دنیای واقعی تناقض غیر ممکن است و لذا احکام متناقض در مدل ملموس وجود نخواهد داشت. به هر ترتیب، هر دو مدل خالی از اشکال نیست. در مدل نسبی ما فقط مسألهٔ سازگاری را یک گام به عقب می‌رانیم و باید سازگاری دستگاه اولیه را بررسی کنیم. از سوی دیگر پی‌ریزی یک مدل ملموس همواره مقدور نیست، مخصوصاً اگر مجموعهٔ اصول موضوعی

شامل عدّهٔ بینهایتی از عناصر اولیه باشد، زیرا دنیای واقعی شامل عدهٔ بینهایتی از اشیاء نیست.

در اوایل دههٔ ۱۹۰۰ میلادی پارادوکس‌های متعددی در منطق و نظریه مجموعه‌ها کشف شده و تحویل ریاضیات به منطق یعنی تز منطق گرایی شکست خورده بود. از سوی دیگر به نظر می‌آمد که ریاضیات بدون توسّل به مجموعه‌های بینهایت عضوی قادر به رشد و فعالیت نیست، و بینهایت‌ها با تز شهودگرا مشکل داشتند. دیوید هیلبرت (۱۹۴۳-۱۸۶۲) ریاضیدان آلمانی در چنین شرایطی کوشید مبنایی برای ریاضیات فراهم کند که فاقد دشواری‌ها و کاستی‌های منطق گرایی و شهودگرایی باشد. به این منظور مبانی صوری گرایانه را برای ریاضیات پیشنهاد کرد. از نظر این مکتب ریاضیات باید از روی روش، و نه موضوع آن، شناسایی و معرفی شود. موضوعات ریاضی مشخص نیستند و یا اگر هستند طبیعت واقعی آن‌ها مورد توجه نیست.

بنابر مکتب صوری‌گرایی، ریاضیات تنها با علایم سر و کار دارد. این علایم فاقد معنی هستند و لذا جملات ریاضی نه صادق‌اند نه کاذب، صدق و کذب آن‌ها بستگی دارد به این که آیا از فرض‌های بخصوص، که اصول موضوعی نامیده می‌شوند، قابل استخراج هستند یا خیر. هیلبرت تصدیق می‌کند که استدلال‌های متناهی خاصی وجود دارند که از قطعیت کامل برخوردار است و هستهٔ مرکزی ریاضیات را تشکیل می‌دهند. امّا کلیهٔ مفاهیم نامتناهی ریاضی ساختارهای ایده‌آلی هستند که ذهن انسان بر آن هستهٔ مرکزی بنا می‌کند. او اظهار می‌داشت که بخش ایده‌آل را می‌توان آزادانه ساخت مشروط بر این که دارای صفت سازگاری باشد، امّا چه گونه؟

توفیق یا شکست برنامهٔ هیلبرت درگرو حل مسأله سازگاری بود. برهان‌های سازگاری موجود دوگونه بودند، یا مسأله سازگاری را از یک حوزهٔ ریاضیات به حوزهٔ دیگر منتقل می‌کنند (سازگاری نسبی) که چندان مشکل گشا نیستند، و یا باید متکی بر مفاهیم ملموس باشند که مغایر با اهداف صوری‌گرایی است. بدین جهت او روش مستقیم جدیدی پیشنهاد کرد که نظریهٔ برهان نامیده شد. هیلبرت می‌خواست نظریهٔ برهان را در اثر عظیم خود «*مبانی ریاضی*» ارائه دهد. امّا کورت گودل با ارائه دو قضیهٔ اساسی و بی‌ایراد همهٔ رشته‌های

هیلبرت را پنبه کرد. مبانی ریاضی هیلبرت در دو جلد به ترتیب در سال‌های ۱۹۳۴ و ۱۹۳۹ انتشار یافت. امّا قبل از آن، و قبل از آن که هیلبرت بتواند نظریهٔ برهان را تمام کند، گودل در سال ۱۹۳۱، به کمک روشی قابل قبول برای پیروان هر سه مکتب اصلی فلسفهٔ ریاضیات، نشان داد که برای یک دستگاه قیاسی که به حد کافی صوری شده باشد، نظیر دستگاه هیلبرت برای همهٔ ریاضیات کلاسیک، اثبات سازگاری دستگاه به کمک روشهای متعلّق به خود آن دستگاه میسّر نیست. هیلبرت احساس می‌کرد که خواهد توانست مدل‌های صوری ریاضی بنا کند که تصمیم‌پذیر، کامل و سازگار باشند. قضیه اول گودل می‌گوید: اگر S یک مدل صوری سازگار باشد که در آن نظریهٔ مقدماتی اعداد قابل بیان است، آنگاه S حاوی گزاره‌ای مانند G است که نه G و نه نقیض G، هیچکدام جزو قضایای S نیستند. به عبارت دیگر G در S تصمیم‌پذیر نیست. قضیه دوّم گودل اظهار می‌کند که: اگر S سازگار باشد، سازگاری آن در S قابل اثبات نخواهد بود. قضایای گودل تمام برنامهٔ صوری‌گرایی را، حداقل به شکلی که در اصل در ذهن هیلبرت بود، به هم ریخت. قضایای گودل در زمرهٔ مهمترین و دشوارترین قضایای تمامی ریاضیات قرار دارند و نمی‌توان آن‌ها را با جزئیات فنی در این جا مطرح کرد.

بدین ترتیب کار هیلبرت و سرانجامِ مکتب صوری‌گرایی به بن‌بست رسید. امّا تلاشهای ریاضیدانان تراز اول در جهت رفع این مشکل ادامه دارد. باید توجه داشت که قضایای گودل ایجاب نمی‌کند که هیچ اثبات قابل قبول برای سازگاری مورد نظر هیلبرت وجود ندارد، بلکه باید دنبال روشی دقیق‌تر و مطمئن‌تر گشت، یا برای هر مدل مورد نظر اثبات سازگاری جداگانه‌ای یافت. به عنوان مثال حساب پئانو یکی از سیستم‌های صوری است که بعدها گِنتسن اثبات قابل قبولی برای سازگاری آن ارائه داد. این مثال را توضیح می‌دهیم.

جوزپّه پئانو (۱۹۳۲ـ۱۸۵۸) که بسیاری از علایم منطقی و نظریهٔ مجموعه‌ها، ازجمله ε (تعلق دارد)، $\cup$ (اجتماع) و $\cap$ (اشتراک) و $\subset$ (مشمول) را نیز ابداع کرده، یک مدل صوری برای اعداد طبیعی بیان کرد که به *اصول موضوع پئانو* معروف است. او سه کلمهٔ *صفر*، *عدد*، و *تالی* را به عنوان اصطلاحات اولیه انتخاب نمود که در پنج اصل موضوعی به صورت زیر صدق می‌کنند:

۱. صفر یک عدد است.

۲. اگر a یک عدد باشد، تالی a نیز یک عدد است.

۳. صفر تالی هیچ عددی نیست.

۴. دو عددی که تالی‌های برابر داشته باشند، خودشان برابرند.

۵. اگر S مجموعه‌ای از عددها باشد که شامل صفر و شامل تالی هر عضو خودش است آنگاه هر عدد در S است (S شامل همهٔ اعداد است).

اصول موضوع پئانو را با استفاده از زبان منطقی نظریهٔ مجموعه‌ها می‌توان به صورت زیر بیان کرد.

یک مجموعه مانند $N_\circ$ و یک تابع مانند $t : N_\circ \longrightarrow N_\circ$ وجود دارد به طوری که:

۱. t پوشا نیست (عضوی مانند $\circ \in N_\circ$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $n \in N_\circ$، $t(n) \neq \circ$).

۲. t یک به یک است (اگر $m, n \in N_\circ$ و $t(n) = t(m)$ آنگاه $m = n$).

۳. اگر $S \subset N_\circ$ چنان باشد که $\circ \in S$ و به ازای هر $n \in S$ داشته باشیم $t(n) \in S$، آنگاه $S = N_\circ$.

به وسیلهٔ اصول موضوع پئانو می‌توانیم مجموعهٔ عددهای طبیعی را بسازیم، و تمام خواص حساب معمولی را عرضه کنیم، و بعداً دستگاههای دیگر اعداد، شامل اعداد صحیح، اعداد حقیقی و اعداد مختلط از روی آن ساخته می‌شوند. در واقع $N = N_\circ - \{\circ\}$ همان مجموعهٔ اعداد طبیعی است، $t(\circ)$ را با ۱، $t(۱)$ را با ۲ و الی آخر نشان می‌دهیم.

به طرق مختلف می‌توان مجموعهٔ $N_\circ$ را ساخت، مثلاً اگر x یک مجموعهٔ دلخواه باشد و تعریف کنیم $t(x) = x \cup \{x\}$، آنگاه می‌توان نوشت:

$$N_\circ = \{x,\ t(x),\ t(t(x)),\ \ldots\}$$

ساده‌ترین حالت آن است که x را مجموعهٔ تهی ϕ انتخاب کنیم و برای راحتی از علایم زیر استفاده کنیم.

$$\circ = \phi$$

$$۱ = t(\circ) = t(\phi) = \phi \cup \{\phi\} = \{\phi\}$$

$$۲ = t(۱) = t(\{\phi\}) = \{\phi\} \cup \{\{\phi\}\} = \{\phi, \{\phi\}\}$$

$$۳ = t(۲) = \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

.. ..

یا اگر t را به صورت $t(x) = \{x\}$ تعریف کنیم، می‌توانیم بنویسیم

$۰ = \phi$ و $۱ = \{\phi\}$ و $۲ = \{\{\phi\}\}$ و $۳ = \{\{\{\phi\}\}\}$ و ...

ملاحظه می‌شود که اوّلاً اعداد ۰، ۱، ۲، و... به راحتی تعریف می‌شوند، ثانیاً طرق مختلفی برای تعریف این اعداد وجود دارد، ثالثاً لازم نیست برای تعریف آنها حتماً از ابزار ملموس فیزیکی استفاده شود. به همین طریق وقتی اصول موضوعی هیلبرت را برای هندسه در نظر بگیریم که در آن نقطه، خط مستقیم، صفحه و چند مفهوم خاص دیگر به عنوان اصطلاحات اولیه پذیرفته می‌شوند، نیازی به تعریف مجدّد نقطه و خط و صفحه پیش نمی‌آید، بلکه معانی آنها آنچنان که هستند از فرض‌های اصول موضوعی و نتایج آن معلوم می‌شود.

امروزه اکثر قریب به اتفاق شاخه‌های ریاضیات تحت تأثیر فلسفه صوری گرا قرار دارد، و ساختمان‌های ریاضی بر مبنای اصول موضوعی و با دیدگاه فلسفی این مکتب ساخته می‌شود، هر چند که بحث سازگاری این ساختمان‌ها نزدیک به یک قرن است که مورد بحث و بررسی و تحقیق ریاضیدانان برجسته قرار دارد و هنوز به نتیجه مطلوب نرسیده است. هنوز این تردید وجود دارد که روزی در گوشه‌ای از این جهان پهناور ریاضی‌دانی برای یکی از این دستگاههای ریاضی مثال نقضی پیدا کند و کل جریان مکتب صوری‌گرا را بی‌اعتبار سازد.

منابع

۱ـ آشنایی با تاریخ ریاضیات، هاورد و. ایوز، مترجم: محمد قاسم وحیدی اصل، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی، جلد دوم، ۱۳۶۸

۲ـ برهان گودل و حقیقت و برهان، ا.ناگل، ج. نیومن، آ. تارسکی، مترجم: محمد اردشیر، ناشر: انتشارات مولی، ۱۳۶۴

۳ـ مبانی ریاضیات، ا.استیوارت، د.تال، مترجم: محمد مهدی ابراهیمی، ناشر: مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۵

۴ـ گرایشهای موجود در فلسفه ریاضیات، مقاله، نویسنده: حمید وحید، نشر ریاضی، سال ۱۰، شماره ۲، ۱۳۷۸

۵ـ گفت و شنودهایی در ریاضیات، آ.رنیی، مترجم: سعید قهرمانی، ناشر: شرکت سهامی انتشارات خوارزمی، ۱۳۷۳

۶ـ فلسفهٔ ریاضی، کارناپ، وان نویمان، راسل، ترجمه بانظارت حسین ضیائی، ناشر: مرکز ایرانی مطالعهٔ فرهنگها، ۱۳۵۹

7- A History of Mathematics, Carl B. Boyer, John Wiley, 1968

8- The Philosophy of Mathematics, Edited by W.D Hart, Oxford University Press, 1996