مهندس مصطفی کاظمی*

مدلسازی ریاضی و کاربرد آن در مدیریت

چکیده

مدل ریاضی یک نمایش ریاضی از سیستم واقعی است که در برنامه‌ریزی راهنمای یافتن بهترین نحوه تخصیص منابع محدود و کمیاب‌است. با توجه به سادگی و کم هزینه بودن مدلهای ریاضی و امکان تحلیل‌سریع آنها مدلهای ریاضی در علم مدیریت اهمیت بسزایی دارند.

عناصر اصلی یک مدل ریاضی شامل متغیرهای تصمیم گیری، محدودیتها وتابع هدف می‌باشد. مهمترین موارد‌کاربرد مدلهای ریاضی، توصیف، پیش بینی، ارزیابی گزینه‌ها و آزمون تجربی نظریه‌ها است. مدلهای ریاضی بر حسب معیارهای مختلف به انواع گوناگونی طبقه‌بندی می‌شوندوساخت هرنوع‌ازاین مدلهاطی‌فرآیند ۶مرحله‌ای‌صورت میگیرد که عبارتند از: تعیین متغیرهای تصمیم، گردآوری اطلاعات، تعیین تجمیع مناسب اطلاعات و طبقه‌بندی آنها، تعیین نوع مدل، تنظیم و ساخت مدل و ساده‌سازی مدل. پس از مدلسازی ارزیابی و تصحیح آن اهمیت دارد که با توجه به ضوابط چهارگانهٔ دقت، اعتبار، ثبات و سهولت در برآورد متغیرها انجام می‌شود. بعد از آماده شدن مدل باید آن راحل کرد که مهمترین‌روشهای حل مدلها را می‌توان آنالیز ریاضی، برنامه ریزی خطی، برنامه‌ریزی اعدادصحیح، برنامه ریزی غیر خطی،

---

* - عضو هیئت علمی دانشکده علوم اداری و اقتصادی دانشگاه فردوسی مشهد

برنامه‌ریزی پویا ، شبیه سازی و روشهای خاص برشمرد . با همه مزایایی که مدلهای ریاضی دارند در مواردی از جمله نامحسوس بودن اهداف و متغیرها ، فقدان نظریه‌های معتبر ، پیچیدگی بیش از حد توابع و نیز عدم دسترسی به آمار و اطلاعات صحیح و لازم‌کاربرد آنها ناممکن یا بسیار مشکل است .

مقدمه

بررسی و تحلیل رفتار یک سیستم موجود یا تعیین سیستمی که در آینده وجود خواهد داشت مستلزم آزمایش سیستم یا مدلی از آن است . در بسیاری از موارد که امکان تجربه و آزمایش وجود ندارد و یا پرهزینه است سیستم را به وسیله الگوئی که براساس عمده‌ترین ویژگیهای آن طرح می‌شود ، بررسی و مطالعه می‌کنند . این الگو به طرق گوناگون طراحی و ساخته می‌شود که یکی از این گونه‌ها مدل ریاضی است .

مدل ریاضی بیان مهمترین ویژگیهای یک سیستم‌واقعی‌به وسیله تجرید ریاضی است . به عبارت دیگر مدل ریاضی نمایش ساده وکلی جهان عینی است . در مجموعه مدلهای گوناگونی که می‌توان از یک پدیده ساخت بالاترین درجه ساده‌سازی متعلق به مدلهای ریاضی است . گرچه تجرید ریاضی باعث می‌شود درجه واقع‌گرائی مدل کاهش یابد اما نظر به سادگی وکم هزینه بودن مدلهای ریاضی نسبت به سایر مدلها و نیز امکان تحلیل سریع اینگونه مدلها ، مدلهای ریاضی از اهمیت بسزائی برخوردارند . از این دیدگاه ، مشخصهٔ علم مدیریت استفاده از مدلهای ریاضی در ارائه رهنمودهایی جهت تصمیم‌گیری صحیح به مدیران است . به تعبیری می‌توان گفت مدلسازی ریاضی بر ارزش علم مدیریت افزوده است و شیوه‌های گوناگون مدلسازی هرکدام عناوین برجسته‌ای از مجموعه مباحث مهم علم مدیریت را به خود اختصاص داده‌اند . سه عنصر اساسی مدلهای ریاضی شامل متغیرهای تصمیم ، محدودیتها و تابع هدف می‌باشند .

متغیرهای تصمیم متغیرهائی هستند که درحیطه کنترل تصمیم‌گیرنده هستند . در مدیریت این متغیرها معرف مقادیری مثل موجودی کالادرانبار ، زمان انجام فعالیت ، ابعاد ، میزان تولید ، ساعات اضافه‌کاری ، نیروی انسانی و ... هستند . علاوه‌براین ، متغیرها ممکن است اعدادی باشند که معرف تصمیمهای منطقی یا پارامترهای توصیف کننده وضعیت سیستم‌اند .

تابع هدف ، هدف مسأله را به صورت تابعی از متغیرهای تصمیم‌گیری بیان می‌کند . بسته به نوع مسأله ممکن است حداقل کردن یا حداکثر کردن تابع هدف مدنظر باشد . بطور کلی مسأله حداقل سازی را می‌توان تنها با تغییر علامت تابع هدف به مسأله حداکثرسازی تبدیل کرد . مسائلی که به هریک ازاین دوصورت حل شوند منجر به خط مشی بهینه همسان می‌شوند .

معمولاً هر مدل ریاضی شرایطی دارد که باید محقق شود. محدودیتها ، امکانپذیری را برحسب توابع یا نامعادلاتی از متغیرهای تصمیم‌گیری بیان می‌کنند . البته وجود محدودیتها در مسأله بهینه‌سازی الزامی نیست . با درنظرگرفتن مجموعه‌ای از متغیرهای تصمیم‌گیری ، تابع هدف و هر تعداد موردنیاز از محدودیتها می‌توان مدل ریاضی یک مسأله واقعی را به صورت ذیل نوشت :

$$\text{Min (Max) } Z(x,c)$$

به شرط اینکه :

$$g_i(x) > 0 \qquad i = ۱, ۲, \ldots, m$$

$$h_j(x) = 0 \qquad j = ۱, ۲, \ldots, n$$

x برداری است که مجموعه متغیرهای تصمیم‌گیری را مشخص می‌کند و c بردار مشخص کننده مجموعه ضرایب است . Z تابع هدف برحسب x و c همچنین g_i و h_j

توابع بیان کننده محدودیتهای مسأله هستند .

کاربرد مدلهای ریاضی

چهار مورد از عمده‌ترین کاربردهای مدلهای ریاضی ، توصیف ، پیش‌بینی ، ارزیابی گزینه‌ها و آزمون تجربی نظریه‌ها می‌باشند . مدلهای توصیفی جهت درک رفتار سیستمها بکار می‌روند . برای سادگی بیشتر ممکن است برخی اجزاء سیستم به جای کل سیستم و به وسیله مدل توصیف شوند . توصیف یک پدیده به وسیله مدل ریاضی سبب می‌شود شناخت بهتری از سیستم پیدا کنیم . به دلیل تغییراتی که ممکن است در متغیرهای مدلهای توصیفی به وجود آید لزوماً از مدلهای توصیفی نمی‌توان برای پیش‌بینی استفاده کرد . مدلهای ریاضی که در موارد پیش‌بینی کاربرد دارند خصوصیاتی دارند که عمده‌ترین آنها عبارتند از : ثابت بودن روابط در طی زمان ، توجه به روابط علت و معلولی و به صورت کلی‌تر همبستگی بین متغیرها و اطمینان از امکان برآورد متغیرهای مستقل مدل در آینده . درچنین شرایطی مدل می‌تواند اثرات ناشی از تغییرات سیستم و یا تغییر روش عملکرد آن را پیش‌بینی کند .

مدلهای‌ریاضی می‌توانندنتایج‌گزینه‌هاواستراتژیهای گوناگون را مشخص کنند . به این ترتیب با مقایسه نتایج می‌توان بهترین استراتژی و راه حل را انتخاب کرد . اگر پارامترها و متغیرهای مدل را براساس سیاستهای‌مختلف‌تغییردهیم می‌توان تأثیر سیاستها در وضعیت سیستم‌را همانگونه‌که مدل‌نمایش می‌دهد، مشاهده‌نمود. کاربرد مدل در تصمیم‌گیری تلاشی است به منظور ایجاد روشی سیستماتیک برای یاری رساندن به تصمیم‌گیرنده درانتخاب یک‌گزینه مناسب از طریق مقایسه پی‌آمدهای استراتژیهای گوناگون .

درکاربرد مدل برای آزمون نظریه‌ها بایدتوجه داشت که‌نظریه حاکم بر مدل است . نظریه ساختار مدل را مشخص می‌کند و این ساختار را توسط داده‌های تجربی می‌توان آزمون کرد . بدون نظریه امکان ارائه مدل ریاضی بسیار دشوار است . به عنوان مثال

می‌توان گفت اقتصادسنجی در مدلسازی کاربردهای وسیعی دارد زیرا مجموعه فنون آماری است که برای آزمون نظریه‌های اقتصادی به وسیله جمع‌آوری داده‌های واقعی و ساخت مدلهای ریاضی در زمینه اقتصاد مورد استفاده قرار می‌گیرد.

طبقه‌بندی مدلهای ریاضی

طبقه‌بندی مدلهای ریاضی از دیدگاههای گوناگون می‌تواند صورت گیرد. بیشتر مدلهایی که در مدیریت و دیگر حوزه‌های علوم و مهندسی با آنها مواجه می‌شویم برحسب معیارهای مختلف از قبیل رفتار توابع، تعداد سیکلهای زمانی، رفتار متغیرها و پارامترهای مدل و رفتار متغیرها در جواب بهینه طبقه‌بندی می‌شوند.

الف - رفتار توابع

اگر تابع هدف و نیز تمامی توابع مربوط به محدودیتها برحسب متغیرهای تصمیم‌گیری از نوع خطی باشند مدل را خطی می‌نامند. اگر حداقل یکی از توابع مربوط به محدودیتها و یا جزئی از تابع هدف دارای عامل غیرخطی باشد مدل را غیرخطی می‌نامند. بطور کلی روشی که برای حل مدلهای غیرخطی باید بکار گرفت پیچیده‌تر و پرهزینه‌تر است.

ب - تعداد سیکلهای زمانی

چنانچه در مدل، سیکلهای زمانی متعدد باشند مدل پویا (دینامیک) و درصورتی که تعداد سیکل زمانی واحد باشد مدل ایستا می‌باشد. به عبارت دیگر در مدلهای پویا متغیرها وابسته به زمان یا مرحله‌ای هستند درحالی که در مدلهای ایستا (استاتیک) متغیرها به صورت ایستا یا یک مرحله‌ای تعریف می‌شوند.

ج - رفتار متغیرها و پارامترها در مدل

درصورتی که متغیرها یا پارامترهای مدل، ثابتهای معلوم و معینی باشند مدل، قطعی یا تعیینی نامیده می‌شود و اگر پارامترها کمیّتهایی غیرحتمی باشند که مقادیرشان به وسیله

توزیعهای احتمالی مشخص شده‌اند ، مدل تصادفی نامیده می‌شود . اگر بعضی از متغیرها مجاز به تغییرات سیستماتیک باشند و تغییرات در جواب بهینه مربوط به تغییرات در آن پارامترها باشد مدل ریاضی پارامتری نامیده می‌شود .

د - رفتار متغیرها در جواب بهینه

اگر متغیرها مجاز به قبول هر مقداری که در محدودیتهاصدق می کنند باشند مدل ریاضی ، پیوسته و اگر تنها مجاز به قبول مقادیر گسسته باشند مدل ریاضی با اعداد صحیح یاگسسته نامیده می‌شود . چنانچه بعضی از متغیرها بتوانندگسسته و بعضی پیوسته باشند مدل بهینه سازی مختلط نام دارد .

مدلسازی ریاضی

مدلسازی ریاضی فرآیندی ٦ مرحله ای است . این مراحل عبارتند از :

الف - تعیین متغیرهای تصمیم

ب - گردآوری اطلاعات

ج - تعیین تجمیع[1] مناسب اطلاعات و طبقه بندی آنها

د - تعیین نوع مدل

هـ - تنظیم و ساخت مدل

و - ساده سازی مدل

متغیرهای مدل باید به‌گونه ای تعیین شوند که بتوانند خصوصیات مهم پدیده و یا سیستم و چگونگی تاثیر متقابل آنها را بیان کنند . در تعیین متغیرهاو تعداد آنها باید به این نکته توجه داشت که هر چه تعداد آنها بیشتر باشد مدل شباهت بیشتری به سیستم واقعی پیدا می‌کند و رفتار آن را بهتر نمایش می‌دهد ولی وجود جزئیات بیشتر ممکن

---

1 - Aggregation

است سبب پیچیده‌تر شدن روش حل گردد. بر عکس، هر چه جزئیات کمتر باشد ممکن است از رفتار واقعی پدیده فاصله بگیریم ولی حل مدل ساده تر خواهد شد. متأسفانه در مدلسازی ریاضی معیاری برای قابل قبول بودن یک مدل از نظر شمول جزئیات و متغیرها قبل از حل مسئله و مقایسه نتایج آن با واقعیت وجود ندارد.

مدلهای ریاضی از هرنوعی که باشند صرفنظر از پیچیدگی و دقتشان در نمایش دستگاه واقعی هرگاه برپایه اطلاعات و داده‌های معتبری استوار نباشند، ارزش چندانی ندارند. در جمع آوری داده‌ها می‌توان نمونه‌های تصادفی داده‌ها را نیز مورد توجه قرار داد. جمع آوری داده‌های مناسب و صحیح امکان تعیین پارامترهای مدل را نیز فراهم می‌سازد. تجمیع و طبقه‌بندی اطلاعات و داده‌ها به منظور قراردادن متغیرهای همگن در یک دسته صورت می‌گیرد. مثلاً ممکن است در ساخت یک مدل، جمعیت را برحسب سن، جنس، اشتغال، مکان سکونت، درآمد و غیره دسته‌بندی نمود. در دسته‌بندی و تجمیع متغیرها باید همواره به دو نکته اساسی توجه داشت: اولاً تجمیع متغیرها باید درجهت رسیدن به اهداف مدل باشد؛ ثانیاً روابط بین اجزاء پدیده بتواند بطور صحیحی با تجمیع متغیرها پاسخ داده شود. با توجه به اینکه مشخص شدن نوع مدل در تعیین راه حل کمک شایانی می‌کند بهتر است قبل از ساخت و تنظیم مدل با بررسی انواع مدلهای ریاضی ـ که قبلاً اشاره شد ـ مدل مناسب مشخص گردد. تعیین نوع مدل سبب می‌شود افق زمانی برنامه نیز روشن گردد و این امر وابسته به پویایی یا ایستا بودن مدل است.

ساخت مدل مهمترین مرحله در مدلسازی ریاضی است. با توجه به مراحلی که تاکنون در مدلسازی ریاضی گفته شد می‌توان پس از طی آن مراحل، مدل ریاضی را ساخت. ساختار اساسی یک مدل ریاضی شامل متغیرهای تصمیم، تابع هدف و محدودیتها است که در این مرحله از فرآیند مدلسازی باید مشخص شوند. بهترین مدل ریاضی مدلی است که از نظر تحلیلی ساده و نشان دهنده سیستم یا پدیده مورد مطالعه باشد. درواقع، پدیده و یا سیستم از طریق مدلسازی ریاضی با اتکا به متغیرهای تصمیم

و پارامترها و شرایط به یک مدل ریاضی تبدیل شده و به شکل تحلیل‌پذیر در می‌آید. اصولاً قوانین‌وفرمولهای معینی‌برای‌تبدیل پدیده و یا سیستم به مدل ریاضی وجود ندارد و انتزاع یک مدل ریاضی از یک وضعیت واقعی یا سیستم بیشتر یک هنر است تا علم.

ساده سازی مدل ریاضی بیشتر برای آسان کردن روش حل و فراهم آوردن امکان تجزیه و تحلیل صورت می‌گیرد. سه مورد از مهمترین مکانیزمهای ساده سازی عبارتند از: تبدیل متغیرهای گسسته به پیوسته، خطی کردن توابع غیرخطی و حذف برخی از محدودیتها. مؤثرترین و ساده‌ترین راه حلهای محاسباتی مربوط به مدلهایی هستند که در آنها توابع به صورت پیوسته و خطی بوده و تعداد محدودیتهای آنها نیز تاحد ممکن کمتر باشد. از طرف دیگر، ساده سازی برمبنای روشهای فوق ممکن است سبب کاهش دقت مدل شود. بنابراین در ساده سازی مدل باید سعی کرد فاصله مدل ریاضی از وضعیت واقعی تا حدممکن کم باشد.

ارزیابی و تصحیح مدل

بیان اینکه مدلی دقیقاًبیانگر وضعیت واقعی موجود یا سیستم آینده‌است غیرممکن می‌باشد. بنابراین ارزیابی ارزش مدل امری نسبی است. یک آزمون اساسی برای مدلهائی که عمل پیش‌بینی را می‌خواهند انجام دهند آن است که آیا نتایج مدل در شرایط حاضر با وضعیت موجود تطبیق می‌کند یا خیر؟ در ارزیابی مدل چهار ضابطه مهم مورد توجه است:

الف ـ دقت: به معنای امکان بازسازی نسبتاً دقیق وضع موجود می‌باشد.

ب ـ اعتبار: به این معنا است که روابط بین متغیرها در مدل برپایه و اساس منطقی استوار شده و فرضهای درنظرگرفته شده در مدل، فرضهائی مجاز و معقول باشند و مدل به طور صحیح و منطقی فرموله شده و حتی‌المقدور شامل تمام متغیرهای مهم باشد.

ج - ثبات : این ضابطه که به معنای ثابت بودن روند مطرح شده در مدل می‌باشد در هنگام کاربرد مدلها برای پیش‌بینی الزامی است . گرچه در مورد بعضی از مدلها دلایل محکمی در دست نیست که وضعیت آینده همچنان با رفتار مدل تطابق داشته باشد .

د - سهولت در برآورد متغیرها : موفقیت یا عدم موفقیت مدلهای پیش‌بینی به امکان برآورد متغیرهای مدل در آینده بستگی دارد . به میزانی که دسترسی به مقدار متغیرهای مستقل در آینده بیشتر امکانپذیر باشد نشاندهنده آن است که در مرحله تعیین متغیرها ، آنها به درستی انتخاب و تعیین شده‌اند .

روشهای یافتن جواب بهینه

روشهای متعددی برای دستیابی به خط مشی بهینه‌ای که کارآئی مدل ریاضی - و به عبارت دیگر سیستمی که این مدل معرف آن است - را حداکثر می‌کنند ، به وجود آمده‌اند. روشهای عنوان‌شده دراین قسمت معرف کلی امکانات انتخابی راه حلها است . بعضی از روشها در مورد گروه خاصی از مسائل مناسبتر هستند . مهمترین روشها عبارتند از : آنالیز ریاضی ، برنامه‌ریزی خطی، برنامه‌ریزی اعداد صحیح ، برنامه‌ریزی غیرخطی ، برنامه‌ریزی پویا ، شبیه سازی و روشهای خاص بهینه سازی .

الف - آنالیز ریاضی : این روش بیشتر در مسائل ساده قابل استفاده است و در بیان استدلالها بسیار ارزشمند می‌باشد . بکاربردن این روش در مورد مدلهای پیچیده اصولاً غیرعملی است . حتی اگر تابع هدف و محدودیتها نسبت به متغیرهای تصمیم‌گیری بسادگی مشتق‌پذیر باشند راه حل مسأله غالباً به حل دستگاههای معادلات غیرخطی منجر می‌شود که راه حل آنها عددی است .

ب - برنامه‌ریزی خطی : بسیاری از مسائل را می‌توان به صورت مدلهای خطی بیان کرد . مزیت مدلهای خطی در بکارگیری روشهای بسیار سریع و قوی برای حل آنها

است . در مسائل بزرگ و چندمتغیره ، برنامه‌ریزی خطی تنها راه عملی برای یافتن جواب است . در بعضی موارد که رفتار واقعی به صورت غیرخطی است تقریب خطی مسأله توجیه پذیر است .

ج ـ برنامه‌ریزی اعداد صحیح : این روش بیشتر در مسائلی قابل استفاده است که پاسخ تمامی یا بخشی از متغیرهای مدل ، باید اعداد صحیح باشند . حل اینگونه مسائل از مسائل برنامه‌ریزی خطی بمراتب دشوارتر است . اغلب این راه حلها منجر به ابداع دستورالعملهائی برای حل این نوع مسائل شده‌است .

د ـ برنامه‌ریزی غیرخطی : جدا از روش آنالیز ریاضی که در مورد حل مدلهای غیرخطی می‌تواند بکار رود مدلهای غیرخطی را با روشهای عدد نیز می‌توان حل کرد . تحقیق درباره الگوریتمهای کارآمد و مؤثر برای برنامه‌ریزی غیرخطی و توسعه آنها بسیار مورد توجه است .

هـ برنامه‌ریزی پویا : بسیاری از مسائل بهینه‌سازی در حوزه مسائلی است که وابسته به عنصر زمان هستند . برنامه‌ریزی پویا نخست برای حل این نوع مسائل به وجود آمد . می‌توان گفت برنامه‌ریزی پویا یک نوع نگرش به مسأله است . مسائلی که در آنها رشته‌ای از تصمیمات دنباله‌دار و مرحله‌ای وجود دارد که می‌توانند از دیدگاه پویا ـ دینامیکی ـ مدل شوند .

و ـ شبیه‌سازی : در مواردی از بهینه سازی ، به دلیل پیچیدگی سیستم یا دشواری محاسبات ، استفاده از روشهای یاد شده ممکن نیست . در این موارد می توان از طریق شبیه سازی به راه حل بهینه دست یافت . پیداکردن جواب در شبیه سازی از طریق سعی و خطا صورت می گیرد . تحلیل حسّاسیّت عملکرد سیستم به پارامترها و متغیرهای گوناگون از طریق شبیه سازی امکانپذیر است .

ز ـ روشهای خاص : روشهائی از قبیل برنامه ریزی شبکه و تحلیل تصمیم گیری روشهائی هستند که برای مسائل خاص کاربرد دارند و در صورتی که ساختار مساله

امکان استفاده از روشهای مزبور را فراهم سازد این امر به معنای امکان بکارگیری روشهای حل سریع و قوی برای مسائل یاد شده می باشد .

محدودیتهای کاربردی مدلهای ریاضی

مواردی وجود دارند که مدلهای ریاضی رانمی توان برای بیان رفتار واقعی پدیده ها و سیستمها مورد استفاده قرار داد . این موارد کاربرد مدلها را محدودمی کنند و یا حداقل می توان گفت که ساخت مدل آنها بسیار مشکل است . ممکن است متغیرها یا اهداف ، نامحسوس بوده و غیر قابل تبدیل به اهداف کمّی معقول باشند . گاهی فقدان نظریه های معتبر سبب می شود که نتوان مدل ریاضی را بر پایه نظریه منطقی بنا نمود . به بیان دیگر چنین مدلی در صورت ساخت ، مجاز نخواهد بود . پیچیده تر شدن بیش از حد توابع ریاضی موجب پدید آمدن مشکلاتی در حل مسئله گشته و از این نظر کاربردمدلهای ریاضی محدود می گردد . محدودیت ناشی از عدم دسترسی به آمار و اطلاعات صحیح و لازم از دیگر دلایلی است که استفاده از مدل ریاضی را با دشواری مواجه می سازد .

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

منابع

الف – فارسی

۱ ـ آریانژاد ، میر بهادر قلی ، برنامه ریزی خطی و الگوریتم کارمارکار ، دانشگاه علم و صنعت ایران ، تهران ، ۱۳۷۱ .

۲ ـ اسمیت ، آلن و دیگران ، تحلیل و طراحی سیستمهای مهندسی عمران ، ترجمه : محمد تقی بانکی ، مرکز نشر دانشگاهی ، تهران ، ۱۳۶۹ .

۳ ـ اصغرپور ، محمدجواد ، برنامه ریزی خطی ، انتشارات دانشگاه تهران ، ۱۳۶۹ .

۴ ـ اصغرپور ، محمدجواد ، تصمیم‌گیری و تحقیق در عملیات در مدیریت ، جلد چهارم ، مرکز آموزش و پژوهش سازمان صنایع ملی ایران ، تهران ، ۱۳۶۶ .

۵ ـ حمیدی زاده ، محمدرضا ، روش شناسی مدلسازی در اقتصاد مدیریت ، مؤسسه بین‌المللی روشهای آموزش بزرگسالان ، تهران ، ۱۳۷۲ .

۶ ـ دوروسنی ، ژوئل و بیشون ، جون ، روش تفکر سیستمی ، ترجمه : دکتر امیرحسین جهانبگلو ، انتشارات پیشبرد ، تهران ، ۱۳۷۰ .

۷ ـ رشیدیان ، پرویز ، تئوری صفها ، جلد اول ، تهران ، ۱۳۶۲ .

۸ ـ شانون ، رابرت ، علم و هنر شبیه سازی سیستمها ، ترجمه : علی اکبر عرب بازار ، مرکز نشر دانشگاهی ، تهران ، ۱۳۷۱ .

۹ ـ صالحی فتح آبادی ، حسن ، شبیه سازی سیستمها ، واحد فوق برنامه بخش فرهنگی دفترمرکزی جهاد دانشگاهی ، تهران ، ۱۳۶۵ .

۱۰ ـ طه، حمدی، آشنائی‌باتحقیق در عملیات ، جلد اول ، ترجمه : محمدباقر بازرگان ، واحد فوق برنامه بخش فرهنگی جهاد دانشگاهی ، تهران ، ۱۳۶۶ .

۱۱ ـ لی ،کولین ، مدلها در برنامه‌ریزی شهری ، مقدمه‌ای برکاربرد مدلهای کمی در برنامه‌ریزی ، ترجمه :مصطفی عباس زادگان ، واحد فوق‌برنامه بخش فرهنگی جهاددانشگاهی ، تهران ، ۱۳۶۶ .

۱۲ - لیبرمن، جرالد.ج. و هیلیر فردریک.س. ، تحقیق درعملیات ، جلد اول : برنامه‌ریزی‌خطی،ترجمه: محمد مدرس و اردوان آصف وزیری ، نشر تندر ، تهران ، ۱۳۶۸ .

۱۳ - هژبرکیانی ،کامبیز ، اقتصادسنجی و کاربرد آن ، بخش فرهنگی جهاد دانشگاهی دانشگاه شهید بهشتی ، ۱۳۶۸ .

ب - انگلیسی

14- Bradley s.p. , Hax A.C. and Magananti T.L. , Mathematical programming , Addison wesely , 1977 .

15- Budnick Frank s. , Applied Mathematical for Business , Economics and the social sciences , McGraw Hill , 1993 .

16- Dowling Edward T. , Mathematical Methods for Business and Economics , McGraw hill , 1993 .

17- Hellman, olavi, An optimization problem in forest Management, European Journal of operational Research , No . 1 , 1986 .

18- Rhodes Edwardo L. , public policy Applications of Management science , Applications of Management science , vol. 7,1993 .

19- Rosser Mike , Basic Mathematics for Economists , Routledge , NewYork , 1993 .

20- Talor Harward M., An Introduction to stochastic Modeling , Academic press , 1984 .

21- White D.J., operational Research , John wiley & sons , 1985 .