حل عددی معادلات قبل و بعد از کاشانی

اورت ام. برونیز

ترجمهٔ بهنام بازیگران[*]

گروه ریاضی دانشگاه کاشان

چکیده ابوریحان بیرونی ریاضیدان برجستهٔ ایرانی نخستین ریاضیدان اسلامی است که ترسیم نُه ضلعی منتظم را به حل یک معادله درجه سوم منجر کرده است. او این معادله را با روش تقریبات متوالی حل می‌کند و به تقریب خیلی خوبی می‌رسد. بیرونی روش خود را در حل این معادله درجه سوم تشریح نکرده است؛ ولی چند قرن پس از بیرونی شرف الدین طوسی در کتاب المعادلات خود حل عددی معادلات درجهٔ سوم را بدست می‌دهد.

جمشید کاشانی ریاضیدان دیگر ایرانی چند قرن پس از طوسی تعیین زاویه یک درجه را به حل یک معادله درجهٔ سوم منجر می‌کند و حل عددی آنرا بدست می‌دهد. روش حل عددی معادلات در اروپا بویژه در قرن نوزدهم میلادی بوسیله ریاضیدانان اروپائی نیز مطرح می‌شود. در این مقاله کارهای ریاضیدانان پیش و پس از کاشانی درباره حل عددی معادلات مورد بررسی قرار می‌گیرد.

کلید واژه‌ها: معادلات عددی، شرف الدین طوسی، جمشید کاشانی، چبیشف، همگرایی، واگرایی.

از آنجا که الگوریتمهای مختلف برای حل معادلات به نتایج عددی یکسانی می‌رسند، و از طرفی دیگر روشهایی که از جنبه نظری نخست معتبر به نظر می‌آیند ولی در عمل بلافاصله با مشکلاتی روبرو می‌شوند، از اینرو ما دیدگاه جدیدی را برای حل معادلهٔ زیر بر حسب x

$$a_0 = a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots = a_1x + \phi(x)$$

[*]. این ترجمه بوسیلهٔ استاد گرامی آقای دکتر یحیی تابش با اصل انگلیسی مقاله مطابقه گردیده و استاد تابش در مواردی اصلاحاتی در ترجمه کرده‌اند که بدینوسیله از ایشان سپاسگزاری می‌شود.

برمی‌گزینیم. در تقریب نخست، همه جملات را به جز اولین جمله سمت راست، نادیده می‌گیریم و خواهیم داشت:

$$x_1=\frac{a_0}{a_1}$$

سپس این مقدار را جایگذاری می‌کنیم و تا توان دوم x_1 را در نظر می‌گیریم.

$$a_0=a_0+a_2x_1^2+...$$

که از آن نتیجه می‌گیریم

$$x_2=x_1-\frac{a_2}{a_1}x_1^2$$

این جایگذاریها را تکرار می‌کنیم و نتیجه ـ که با اعمال ساده جبری بدست آمده است ـ برای پنج جمله اول عبارتست از:

$$x=x_1-\frac{a_2}{a_1}x_1^2+\frac{2a_2^2-a_1a_3}{a_1^2}x_1^3-\frac{5a_2^3-5a_1a_2a_3+a_4a_1^2}{a_1^3}x_1^4+$$
$$\frac{14a_2^4-21a_2^2a_1a_3+3a_3^2a_1^2+6a_2a_4a_1^2-a_5a_1^3}{a_1^4}x_1^5-...$$

بدین ترتیب ـ بدون حتی اطلاع از سریهای توانی و همگرایی آنها از حساب دیفرانسیل و انتگرال ـ یک سری توانی بر حسب x بدست می‌آوریم که به طور صوری در معادله صدق می‌کند، امّا لزوماً همگرا نیست!

در واقع، با این روش ساده وارون سری توانی بر حسب x را به صورت یک سری توانی برای x بر حسب x_1 به دست آورده‌ایم! این نتیجه با آنچه چبیشف ـ با بکارگیری چند صفحه مطلب از حساب دیفرانسیل برای تابع وارون ـ بدست آورد، یکسان است (البته با یک جمله بیشتر!) بر این کار. چبیشف در سال ۱۸۳۸ مدال نقره تعلق گرفت و این نتایج تنها در سال ۱۹۵۱ در مجموعه آثار او، جلد پنجم، صفحات ۲۵ـ۷، چاپ شد و اگر خود را به دو جمله اول محدود کنیم کار چبیشف با نتیجه‌ای که هالی[1] به دست آورد یکسان است.

به هر حال، اگر بنویسیم

$$x_{k+1}=\frac{[a_0-\phi(x_k)]}{a_1}\quad \text{یا} \quad x_{k+1}=x_k+\frac{\langle a_0-a_1x_k-\phi(x)\rangle}{a_1}$$

1. E. Halley, *Phil. Trans.* 18, 1694, 136 seq.

می‌بینیم که این روش همان است که کاشانی[1] برای حل معادله تثلیث زاویه ۳°

$$۳x-۴x^{۳}=\sin ۳°=a$$

توسط فرمول تکرار

$$x_{k+۱}=\frac{۱}{۳}(۴a+x_k^{۳})$$

به کار گرفت که از لحاظ عددی با «روش عمومی» که شرح مطلب را با آن شروع کردیم، انطباق دارد. ولی البته مسئله همگرایی را نیز باید در نظر بگیریم.

شرف الدین طوسی[2] به واسطه وسواس زیادی که به خرج می‌داد روش‌های پیچیده‌تری را برای حل این معادلات برگزید. در واقع طوسی با یک تغییر متغیر:

$$f(x) = f(y+p) = a_{۰} + a_{۱}(p)y + \ldots$$

محاسبه لازم را انجام می‌دهد و y را با مقدار

$$-\frac{a_{۰}}{a_{۱}(p)}$$

تصحیح می‌کند.

یعنی او دقیقاً از روش روفینی ـ نیوتن ـ هورنر در تعیین مقدار تابع و مشتق اول آن پیروی می‌کند، او این روش را با محدود کردن خود به یک رقم بیشتر در هر مرحله تکرار می‌کند.

جهت درک پیامدهای «وسواس» او در حل معادلات فرض کنید می‌خواهیم معادله زیر را به روش عددی حل کنیم:

$$x^{۳}+۱۲x^{۲}+۱۰۲x=۳۴۳۴۵۳۹۵$$

واضح است که مقدار کوچکی برای x ما را به جواب نمی‌رساند و همینطور عدد $۳۴۳۴۵۳۹۵/۱۰۲=۳۳۶۷۱۹$... بیش از حد بزرگ است! پس به همان دلیل با نادیده گرفتن توانهای پایین x نتیجه می‌شود $x_{۱}=۳۲۵$ می‌توان از همه تلاشهای «وسواسانه» جهت یافتن یک «اعشار اول»، «اعشار دوم»، «اعشار سوم»... صرف نظر کرد و به کارگیری جدولی از توانهای سوم ـ که از زمان بابلیها موجود و معمول بوده است ـ نتیجه گرفت که $۳۶۶^{۳}=۳۴۶۴[۵۹۷۶]$ ، $۳۲۵^{۳}=۳۴۳۲[۸۱۲۵]$

1. Comp. A.P. Youchkevitch and B.A.Rozenfeld, *Al-Kashi,* Moscow 356, page 378 and page 319 where the results are quoted at nine sexagesimal places. The attribution to al-kashi is to be found on page 317.

2. Rosidi Rashed, *Arch. Hist. Exact Sci.* 18, 1978, 191-243, refers to the work of al-TDS1 following his procedure step by step.

پس می‌توان مستقیماً قرار داد

$$x=۳۲۵+y$$

که معادلهٔ زیر بر حسب y

$$y^۳+ ۹۸۷y^۲+۳۲۴۷۷۷y +۱۲۸۳۳۸۰=۰$$

و تصحیح ۳/۹۵=۱۲۸۳۳۸۰/۳۲۴۷۷۷ را بدست می‌دهد.

بنابراین اولین تصحیح عبارتست از ۴ـ. جایگذاری $x=۳۲۱+z$ مستقیماً بـه $z=۰$ منجر می‌شود. طوسی آنچه را که بعداً دوباره توسط روفینی، نیوتن و هورنر کشـف و کامل شده است را به کار می‌گیرد، به جز این واقعیت که او ـ بی جهت! ـ با محاسبه یک رقم بیشتر در هر مرحله روش را پیچیده کرده و سپس دوباره معادله را انتقال می‌دهد. به هرجهت، هنوز هم در بسیاری از کتابهای درسی پیشرفته، این فرآیند با تاکید بر یک رقم بیشتر در هر مرحله، تدریس می‌شود. این کار محاسبه را بیش از حد طولانی می‌کند.

۲. روش تکراری کاشانی برای معادله $ax=A+x^۳$

عبارتست از

$$x_{k+۱}=\frac{(A+x_k^۳)}{a}$$

و این متناظر با قطع کردن منحنی $y=\frac{(A+x^۳)}{a}$ با خط راست $y=x$، است.

او با گرفتن یک مقدار x_k به طور عمودی به سمت منحنی می‌رود، از آنجا به طور افقی به خط راست $y=x$، می‌رود تا $x_{k+۱}$ را بیابد، و الی آخر این بدین معنی است که تنها یکی از سه ریشه حقیقی ـ ریشه میانی ـ را می‌توان یافت و اینکه همگرایی به ریشـه میانی به ازای مقادیر اولیه x بین بزرگترین و کوچکترین ریشه، حاصل می‌شود. از طرف دیگر ـ همانگونه که از شکل ۱ دیده می‌شود ـ روش او واگرا می‌شود. در این حالت خاص او توانست $\sin ۱^\circ$ را بیابد، امّا مقادیر حقیقی دیگر $\sin ۵۹^\circ$ و $\sin ۶۱^\circ$ـ را نمی‌شد با این روش بدست آورد.

یک روش تکراری دیگر، که توسط داری، در سال ۱۶۷۴، پیشنهاد شده بر مبنای دستور زیر است

$$x_{k+۱}^۳=ax_k-A$$

و این یعنی اینکه از یک مقدار اختیار شدهٔ x به طور عـمودی بـه خـط راست $y=x$،

می‌رویم و سپس به طور افقی به سمت خم درجه سوم حرکت می‌کنیم. این روش همواره همگراست، ولی فقط به بزرگترین و کوچکترین ریشه، و هرگز به ریشه میانی همگرا نمی‌شود. (شکل ۱).

از این قبیل روشهای تکراری می‌توان برای حل معادلات درجه دوم ـ جهت اجتناب از ریشه دوم گرفتن ـ استفاده نمود. کافی است معادلهٔ

$$x^{۲}-ax=b$$

را به

$$x_{k+۱}=a+\frac{b}{x_k}$$

تبدیل کنیم و به کسر مسلسلی ـ نامنظم به ازای $b\neq۱$ ـ برسیم که نسبتاً آهسته همگرا می‌شود. برای $a=۰$ این روش کار ساز نیست و روی یک مدار تناوبی دور می‌زنیم.[۱]

اگر بخواهیم در مورد سرعت همگرایی در روش کاشانی تصوری به دست آوریم می‌توانیم معادله اعشاری زیر را در نظر گیریم،

$$۳x-۴x^{۳}=A=۰/۰۵۲۳۳۵۹۵۶...$$

روش تکرار نشان می‌دهد که

$x_{۳}=۰/۰۱۷۴۵۲۴۰۶$ و $x_{۲}=۰/۰۱۷۴۵۲۳۹۸$ و $x_{۱}=۰/۰۱۷۴۴۵۳۱۹$ و $x_{۰}=۰$

روش پیشنهادی داری به رابطه زیر منجر می‌شود

$$۴x_{k+۱}^{۳}=۳x_k-A$$

و با شروع از $x=۰$ داریم $x_{۱}=۰/۲۳۵۶۳۸۷۵۸$.. تنها $x_{۲۲}=۰/۸۵۷۱۶۷۳۰$ در ۹ رقم اعشار برابر مقدار $\sin ۵۹^{\circ}$ است. با شروع از $x=-۱$ برای آنکه ۹ رقم اعشار $-\sin ۶۱^{\circ}$ را داشته باشیم باید $x_{۱۸}=-۰/۸۷۴۶۱۹۷۰۷$ را محاسبه کنیم.

روش طوسی یعنی همان روش روفینی ـ نیوتن ـ هورنر، نتیجه می‌دهد

$$y=\frac{(۸x^{۳}-A)}{(۱۲x^{۲}-۳)}$$

و برای $x=۰$ داریم $x_{۱}=۰/۰۱۷۴۴۵۳۱۹$، $x_{۲}=۰/۰۱۷۴۵۲۴۰۶$

یادداشت:

برای $a_{۰}=A$، $a_{۱}=۳$، $a_{۲}=۰$، $a_{۳}=-۴$، $a_k=۰$ به ازای $k>۳$ سری مقدماتی §۱،

$$x_{۱}+\frac{۴}{۳}x_{۱}^{۳}+\frac{۱۶}{۳}x_{۱}^{۵}$$

---

۱. یکی از موارد دور چرخیدن روی یک مسیر و یا مدار بطور تناوبی است که در واقع نوسان بین دو نقطهٔ ثابت اتفاق می‌افتد.

را به دست می‌آوریم، یعنی

$$0/017445319+0/000007079+0/000000009$$

که به رأی العین نشان می‌دهد که برای ریشه میانی روش کاشانی جمله و رقم رقم با روش چبیشف یکسان است. کاشانی جهت یافتن ریشه‌های دیگر مجبور شد انتقالی در متغیر را به کار ببرد... که شکل خم درجه سه را نیز تغییر می‌دهد.

۱§. آنچه باقی می‌ماند در نظر گرفتن همگرایی روش طوسی است که ـ مجدداً تاکید می‌کنیم ـ از لحاظ نظری همان روش «نیوتن» است.

برای توابع اکیداً یکنوای $f(x)$، که ایجاب می‌کند معادله تنها یک ریشه حقیقی داشته باشد، هیچ مشکلی نیست. در حالت کلی روش تکرار، نقاط تقاطع خمهای

$$y=x \quad , \quad y=x-f(x)/f'(x)$$

را مشخص می‌کند.

نمودار دومی مجانبهای قائمی را به ازای xهایی که در $f'(x)=0$ صدق می‌کنند نشان می‌دهد ـ که برای توابع اکیداً یکنوایی که برای آنها مشتق همواره علامت یکسانی دارد، نمی‌تواند اتفاق بیافتد. خم در حالت $ff''=0$، یعنی به ازای ریشه‌های معادله و نیز در نقاط عطف $y=f(x)$، اکسترمم دارد.

اگر ما تصویر خم را در «آینه $y=x$» به دست آوریم و این را با خم اصلی قطع دهیم، نقاطی را می‌یابیم که روش طوسی ـ نیوتن روی این نقاط نوسان می‌کند، شکل عمومی منحنی نشان می‌دهد که اگر مقادیر اولیه بزرگتر از بزرگترین ریشه معادله $f'(x)=0$، باشد همگرایی به بزرگترین ریشه تضمین خواهد شد؛ در مورد کوچکترین ریشه می‌بایست تغییرات لازم صورت داده شود. در این بین ـ بین مجانبها ـ وضعیت خیلی پیچیده است: در «چپ و راست» یک ریشهٔ $f'(x)=0$، مقدار $f(x)$ ـ به ازای مجانبهای ساده ـ دارای قدرمطلق بزرگ است امّا در سمتهای مختلف، علامتهای متضاد دارد. می‌توان دنباله مقادیر P_k را که برای آن بعد از k تکرار به $f'(P_k)=0$ می‌رسیم را تعیین کرد. چنین دنباله P_k، حداقل دارای دو نقطه حدی I_1، I_2 است که روی این نقاط نوسان شکل می‌گیرد.

جهت روشن شدن وضعیت مثالی، ارائه می‌دهیم!

$$f(x)=(x+1)(x-2)(x-3)=x^3-4x^2+x+6=0$$

روش تکرار دارای قاعده

$$y=\frac{(2x^3-4x^2-6)}{(3x^2-8x+1)}$$

است که در شکل ۲ خم آن نمایش داده شده. ریشه‌های مخرج عبارتند از:

$x_2=$ ۲/۵۳۵۱۸۳۷۵۸ و $x_1=$ ۰/۱۳۱۴۸۲۹۰۸

و مجانبهای قائم را مشخص می‌کنند.

الف. قرار می‌دهیم $y=x_2$ و x را تعیین می‌کنیم، تکرار عملیات این نتایج را بدست می‌دهد.

۲/۵۳۵۱۸۳۷۵ ← ۰/۶۱۳۳۵۵۹۶۱ ←
۲/۴۶۸۷۸۷۹۸ ← ۰/۶۳۶۹۰۱۱۷۶ ←
۲/۴۶۷۹۰۹۱۰ ← ۰/۶۳۷۲۳۱۹۴۲ ←
۲/۴۶۷۸۹۶۴۷ ← ۰/۶۳۷۲۳۶۶۱ ←

ب. قرار می‌دهیم $y=x_1$ و با دنبال کردن روش مشابه نتیجه می‌شود که

۰/۱۳۱۴۸۲۹۰۸ ← ۲/۴۸۲۷۴۸۹۰ ←
۰/۶۳۱۷۱۷۹۷۷ ← ۲/۴۶۸۱۰۴۶۰ ←
۰/۶۳۷۱۵۸۲۹۶ ← ۲/۴۶۷۸۹۹۳۷ ←
۰/۶۳۷۲۳۵۵۷۹ ← ۲/۴۶۷۸۹۶۴۴ ←

اینها «نقاط بحرانی» برای این روش هستند؛ آنها بازهٔ $x_1<x<x_2$ را به مجموعه‌ای از قطعات تقسیم می‌کنند که برای آنها فرآیند، متناوباً یا کوچکترین ریشه همگرا می‌شود.

دو نقطه حدی سریها در ریشه‌های معادله‌ای یافت می‌شوند که با جایگذاری مقدار $y(x)$ به جای x، که به معادله‌ای از درجه ۹ منتج می‌شود، و $f(x)$ را به عنوان ضریبی در بر دارد، به وجود می‌آید. در این حالت به طور صریح داریم

$$(x^3-4x^2+x+6)(20x^6-160x^5+451x^4-502x^3+272x^2-206x+97)=0$$

که عامل آخر آن تنها دارای دو ریشه حقیقی

$I_1=$ ۰/۶۳۷۲۳۶۶۹۶۴۹۳۴ $I_2=$ ۲/۴۶۷۸۹۶۴۰۷

است. به ازای مقادیر اولیه بین I_1 و I_2، فرآیند به ریشه میانی همگرا می‌شود.

به طور کلی می‌توانیم چنین اظهار کنیم:

دقیقتر اینکه جهت تحلیل روش طوسی ـ روفینی ـ نیوتن ـ هورنر، مجبوریم معادله‌ای از درجه بسیار بالاتر از معادله داده شده را حل کنیم.

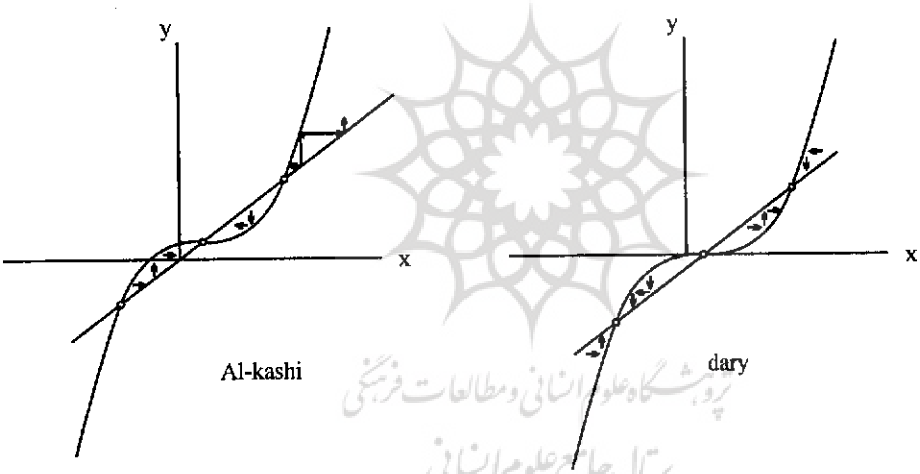
یادداشت:

برای درجات بالاتر مجموعه‌های زیادی از «جفت نقاط نوسانی» ممکن است،

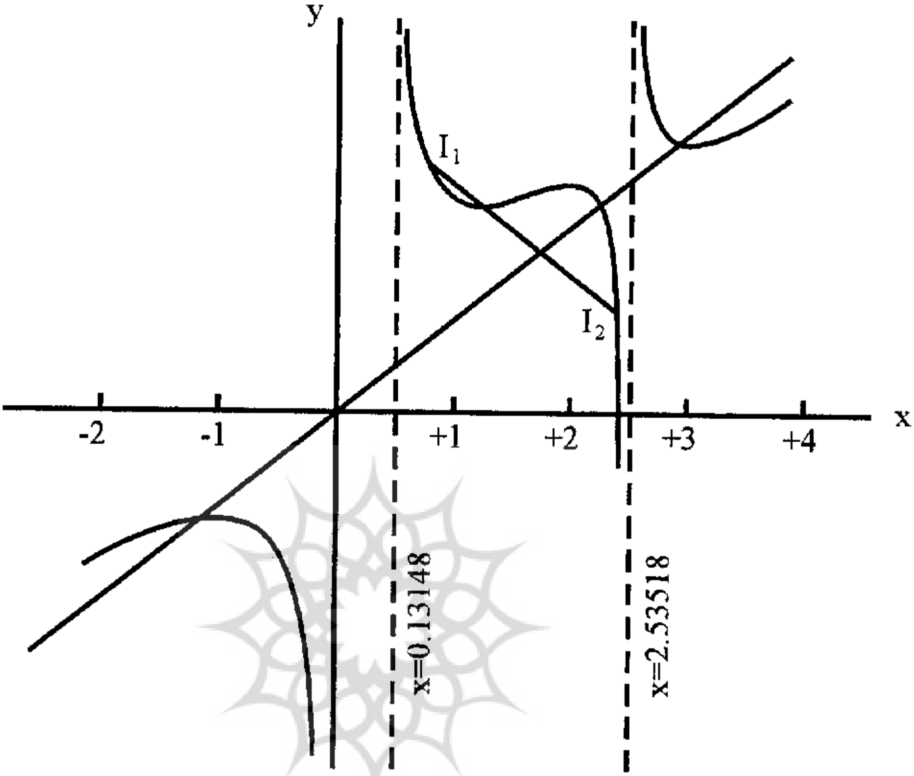
ظاهر می‌شوند. برای یک معادله دلخواه ممکن است همه «خطرات» با هم اتفاق نیافتد امّا ساختن «حالتهای غیر مطلوب» ساده است. برای حالت معادله درجه ۴ فقط به معادله زیر اشاره می‌کنیم:

$۴۵x_{۴}-۵۵۵x_{۲}+۲۱۷=۰$

مادام که با ریشه‌ای متمایز از کوچکترین یا بزرگترین ریشه معادله مواجه شویم. حالت پیچیده بین مجانبها، روش نیوتن را در برنامه‌های محاسباتی، خطرناک می‌سازد. با توجه به این واقعیات نتیجه گیری این است که روشهای به کار گرفته شده توسط طوسی و کاشانی با روشهایی که بعداً توسعه یافتند معادلند ـ مگر از جهت کار غیر ضروری ناشی از احتیاط برای «یک رقم بیشتر در هر مرحله».!



شکل ۱



شکل ۲