روش ابن هیثم در ترسیم هفت ضلعی منتظم*

نسیم ماحوزی
دانشجوی کارشناسی ارشد فلسفه علم دانشگاه صنعتی شریف

مقدمه

رسم هفت‌ضلعی منتظم توسط خط‌کش و پرگار از جمله مسائل لاینحلی است که از زمان یونانیان مطرح بوده و در این رهگذر تلاشهایی پی‌گیر، بویژه از سوی ریاضیدانان اسلامی، نظیر ابن هیثم، ابن جود، کوهی و... صورت گرفته است. آنان در این جستجو با نقد روش ارشمیدس و نیز بهره‌گیری از مقاطع مخروطی، راه‌حلهایی را ارائه داداه‌اند که نگارنده در این پژوهش ضمن بیان روش ارشمیدس به شرح ۵ روش پیشنهادی ابن هیثم می‌پردازد.

بخش اول، آشنایی با تعاریفی است که ما را در درک بهتر اثباتهای ارائه شده در متن یاری می‌دهد. بخش دوم، شرح و بررسی روش ارشمیدس است در ترسیم هفت‌ضلعی منتظم. بخش سوم شرح و شناخت روشهای پنجگانه‌ای است که ابن هیثم برای رسم هفت‌ضلعی منتظم ارائه داده است. بخش ضمیمه، نگرشی است بر محال بودن امکان دوبرابرکردن مکعب، تثلیث زاویه، رسم هفت‌ضلعی منتظم و نیز فهرستی از چند ضلعی‌های منتظم قابل محاط در دایره.

---

*. جای آن دارد که صمیمانه از راهنماییهای ارزندهٔ استاد گرانمایه و ارجمند، آقای دکتر جعفر آقایانی چاوشی، که با معرفی منابع معتبر، شکیبایی و نظارت بی‌وقفهٔ خویش مرا در نگارش این مقاله یاری داده‌اند، قدردانی کنم.

۱ ـ تعاریف

۱ـ۱ ـ تعاریف مقدماتی برای روش ارشمیدس

۱ـ۱ـ۱ خطکش بدون نشانه (تقسیم‌بندی نشده)

این وسیله برای رسم پاره‌خط واصل دو نقطهٔ مفروض مورد استفاده قرار می‌گیرد. برخی ترسیمهای هندسی بر اساس قوانین کلاسیک یونان با خط‌کش و پرگار امکان‌پذیر نیست. باید توجه داشت که منظور از خط‌کش، خط‌کش بدون نشانه است که نمی‌تواند مقدار فاصلهٔ دو نقطه را نشان دهد.

۱ـ۱ـ۲ پرگار

برای رسم دایره یا کمان از یک نقطه، بعنوان مرکز دایره و نقطه‌ای در فاصله‌ای دورتر که شعاع را مشخص می‌کند مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین از آن برای انتقال یک فاصله یا رسم دایره‌ای به شعاع آن فاصله می‌توان استفاده کرد.

۱ـ۱ـ۳ چندضلعی منتظم محاط در دایره

یک n ضلعی $(n>3)$، منتظم است اگر دارای n ضلع و n زاویهٔ برابر باشد و هر رأس آن بر دایره واقع باشد. این n ضلعیها دارای خواص زیر می‌باشند:

برای α، زاویهٔ مرکزی و B، زاویهٔ رأس n ضلعی، p محیط، a اندازهٔ ضلع و s مساحت n ضلعی داریم:

$$\beta = \frac{180(n-2)}{n}, \alpha = \frac{360}{n}, \alpha + \beta = ۱۸۰$$

$$p = na = 2nR\mathrm{Sin}\alpha / 2$$

$$a = 2R\mathrm{Sin}\,\frac{\alpha}{2} \quad S = \frac{na\sqrt{4R^2-a^2}}{4}$$

$\alpha = \frac{360^\circ}{7}$ و $\beta \simeq 128.57^\circ$

در هفت ضلعی منتظم، به‌طور خاص مجموع زوایا ۹۰۰ درجه است.

۱ـ۱ـ۴ قوانین کلاسیک رسم هندسی یونانیان (هندسه اقلیدسی):

۱ ـ حداقل دو نقطه در شروع کار داده شود. (که به آنها نقاط قابل رسم گفته می‌شود).

۲ ـ از نقاط رسم شدهٔ مفروض می‌توان با خط کش، خطی گذراند.

۳ ـ با پرگار می‌توان دایره‌ای به مرکز یک نقطه رسم کرد که از دیگری عبور کند.

۴ ـ نقاط تقاطع خط و دایره قابل رسمند.

۱ـ۱ـ۵ اعداد فرما:

$F_n = 2^{2^n} + 1$ برای $n \geq 0$ اعداد فرما نامیده می‌شوند. این اعداد که لااقل برای $n \leq 5$ اول هستند (برای $n \geq 6$ هنوز ثابت نشده که اول هستند) می‌توانند ضلعهای یک n ضلعی قابل محاط شدن در دایره باشند. (بوسیلهٔ خط کش و پرگار). اعداد فرما برای $n=$۰، ۱، ۲،... و ۵ عبارت است از:

۵، ۱۷، ۲۵۷، ۶۵۵۳۷، ۶۷۲۹۷، ۴۲۹۴۹.

۱ـ۱ـ۶ـ اعداد جبری:

معادلهٔ n جمله‌ای زیر را در نظر بگیرید:

$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ریشه‌های حقیقی چنین معادلاتی جبری نامیده می‌شود. بعبارت دیگر جبری از درجهٔ n نامیده می‌شود، اگر معادلهٔ $P_n(x)$ را ارضا کند. (به‌ازای بعضی $P_n(x)$ با ضرایب صحیح). اعداد گویا و صحیح همگی جبری از درجهٔ ۱ هستند.

۱ـ۱ـ۷ ـ اعداد غیر جبری:

عددی که ریشهٔ هیچ چند جمله‌ای با ضرایب صحیح نباشد، عددی جبری از هیچ درجه‌ای نیست و به آن عدد غیر جبری می‌گویند. از این تعریف نتیجه می‌شود که هر عدد جبری گنگ است و غیرگویا چراکه هر عدد گویا جبری است از درجهٔ ۱. اعدادی چون π، e و... غیر جبری است.

۱ـ۱ـ۸ روش ترسیم مرزی

(Verging Construction **یا** Neusis Construction)

ساختی است که با ساده کردن قوانین کلاسیک یونانیان بدین صورت که بتوان از خط کش مدرج استفاده نمود، امکان حل مسائل ترسیمی، چون رسم هفت ضلعی منتظم، دوبرابر کردن مکعب و تثلیث زاویه را فراهم می‌کند.

۱ـ۲ تعاریف مقاطع مخروطی

۱ـ۲ـ۱ وتر مقطع مخروطی:

پاره‌خطی است که دو نقطه یک مقطع مخروطی را به هم وصل می‌کند.

۱ـ۲ـ۲ قطر مقطع مخروطی:

هر خط راستی که منصف تمام وترهای مقطع مخروطی و موازی یک امتداد خاص (1)، باشد، وتر نامیده می‌شود.

۱ـ۲ـ۳ رأس:

نقطهٔ تقاطع قطر و مقطع مخروطی، رأس گفته میشود.

۱ـ۲ـ۴ عرض (مرتبط با قطر):

نصف وترهای موازی با 1 عرض نامیده می‌شود. عرضها همیشه موازی مماس در نقطه رأس است.

۱ـ۲ـ۵ زاویهٔ عرض:

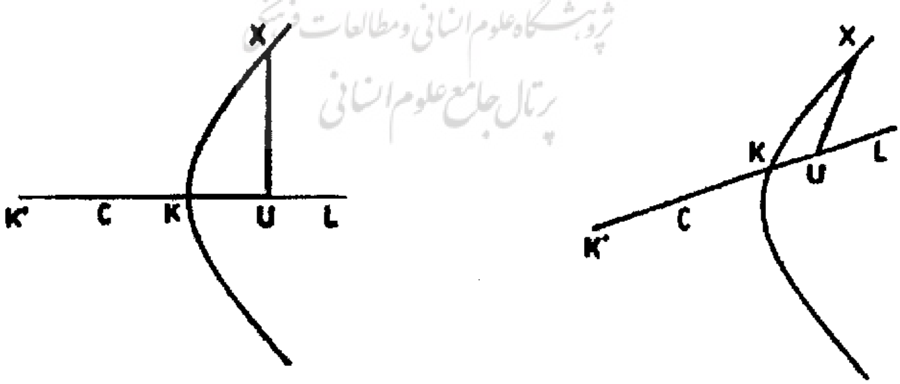
زاویهٔ عرض، زاویهٔ بین عرض و قطر است. اگر زاویهٔ عرضها قائمه باشد، قطر محور نامیده می‌شود. قطرهای سهمی، محور است.

۱ـ۲ـ۶ پارامتر سهمی:

اگر K رأس باشد و XU عرض مرتبط با KL باشد آنگاه $xu^2 = KU.p$ پاره‌خط p تنها بستگی به انتخاب قطر KL دارد. p پارامتر قطر KL است. (بعبارت دیگر فاصلهٔ کانون سهمی از خط هادی پارامتر، نامیده می‌شود.)

۱ـ۲ـ۷ خاصیتهای P۱ و P۲ برای سهمی:

P1: اگر KL محور باشد؛ XU=KU.p



شکل ۱ و ۲

P2: اگر KL محور نباشد؛ XU=KU.p

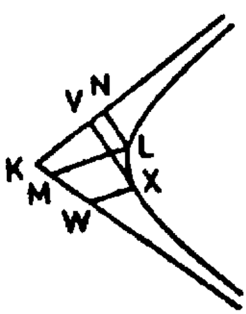
۱ـ۲ـ۸ مرکز هذلولی:

برای هر هذلولی نقطه‌ای به نام مرکز وجود دارد و قطرهای هذلولی همگی خطوطی راست هستند که از مرکز گذشته، هذلولی را قطع می‌کند.

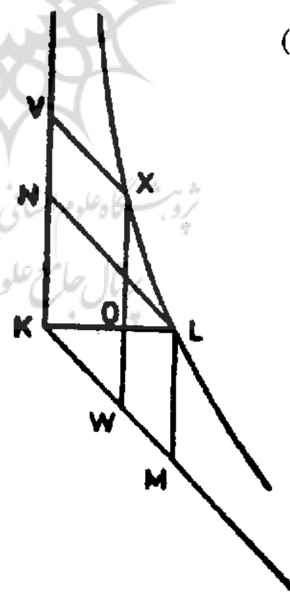
۱ـ۲ـ۹ خاصیت هذلولی:[1]

برای هذلولی که مجانبهایش زاویهٔ 135° تشکیل می‌دهد و MK ‖ LN ‖ VK,XV ‖ XW ‖ LM, $L\hat{K}N=90°$ حالت خاص قضیهٔ زیر اثبات می‌شود:

اگر X,L دو نقطه روی هذلولی با مجانبهای KM,KN باشد و اگر LM ‖ LN,XW ‖ XV باشد آنگاه LM.LN مساوی XW.XV خواهد بود. (شکل ۴ و ۳)



شکل ۴

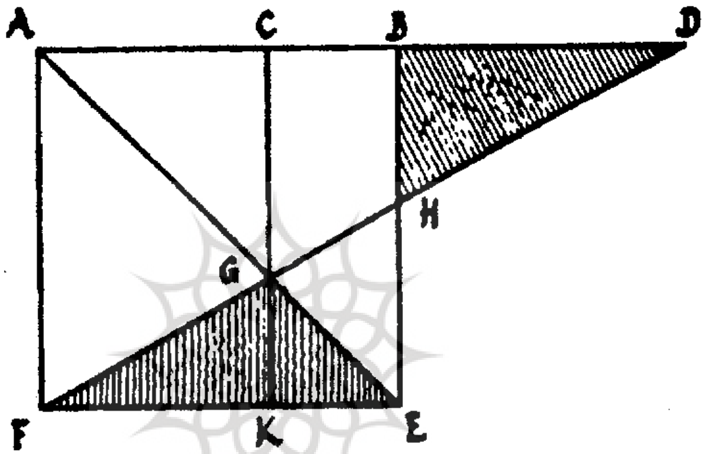


شکل ۳

۱. چنان که خواهیم دید ابن هیثم از این خاصیت برای اثبات این که $XW.KO=LK^2$ استفاده می‌کند. (O، نقطهٔ تقاطع LK,XW است.)

۳ ـ ساخت هفت ضلعی منتظم توسط ارشمیدس[۲]

ثابت ابن قره، مقالهٔ تقریبات ناشناختهٔ ارشمیدس را به عربی ترجمه کرد و Carl Schoy در بررسی ریاضیات اسلامی به این ترجمه دست یافت که پس از فوت او در سال ۱۹۲۷ به چاپ رسید. در این مقاله به ساخت هفت ضلعی منتظم توسط ارشمیدس می‌پردازیم.



شکل ۵

ساخت شکل ۵ را با پاره‌خط داده شدهٔ AB آغاز می‌کنیم. روی AB مربع AFEB را می‌سازیم. قطر AE را رسم می‌کنیم و خط AB را از طرف B امتداد می‌دهیم.

۲. در این بخش در واقع به بررسی چگونگی این ساخت با توجه به کتاب و مقالهٔ زیر پرداخته‌ام:

Aaboe, Asger, *Episodes from the early history of mathematics* (1964)

J.P. Hogendijk."Greek and Arabic constructions of the regular heptagon", *Archieve of exact sciences 30* (1984),

خط FD را چنان رسم می‌کنیم که $S_{\triangle BHD} = S_{\triangle FGE}$ ($S_{\triangle}$= مساحت مثلث) باشد. به عبارت دیگر از نقطهٔ F، خط‌کش را چنان تغییر مکان می‌دهیم که همواره بر نقطه F واقع باشد و مساحت بین این خط، قطر AE و ضلع FE برابر با مساحت محصور بین این خط، ضلع BE و ادامهٔ ضلع AB از طرف B باشد.

FD چنین خطی است. (در واقع رسم خط FD، با خط‌کش و پرگار میسر نخواهد بود.) FD قطر AE را در G، ضلع BE را در H و ادامهٔ AB را در D قطع می‌کند.

از نقطهٔ G خطی به موازات BE رسم می‌کنیم تا ضلع FE را در K و ضلع AB را در C قطع کند. حال ادعا می‌کنیم که چهار نقطهٔ D، C، B، A در دو معادلهٔ زیر صدق می‌کنند:

I) $AB.AC = BD^2$

II) $CD.DB = AC^2$

اثبات:

$$S_{\triangle BHD} = S_{\triangle GFE} \Rightarrow GK.FE = BH.BD \Rightarrow \frac{BH}{GK} = \frac{FE}{BD}$$

مثلث $\overset{\triangle}{D}BH$ با مثلث $\overset{\triangle}{G}KF$ متشابه است ($\overset{\triangle}{D}BH \simeq \overset{\triangle}{G}KF$). زیرا هردو قائمه است و $F = D$ (F و D دو زاویهٔ حاده است) بنابراین داریم:

$$\frac{BH}{GK} = \frac{BD}{FK}$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow \left(\frac{BH}{GK}\right) = \frac{FE}{BD} = \frac{BD}{FK} \Rightarrow FE.FK = BD^2$$

حال در معادلهٔ فوق به جای FE معادل آن، AB و به جای FK، AC را جایگزین می‌کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$AB.AC = BD^2$

حال دو مثلث متشابه $\overset{\Delta}{F}KG$ و $\overset{\Delta}{D}CG$ را در نظر می‌گیریم. در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{GK}{FK} = \frac{GC}{CD} \Rightarrow GK.CD = GC.FK$$

از طرف دیگر چون AE قطر مربع ABFE است $G\hat{A}C=G\hat{E}K=45°=A\hat{G}C$

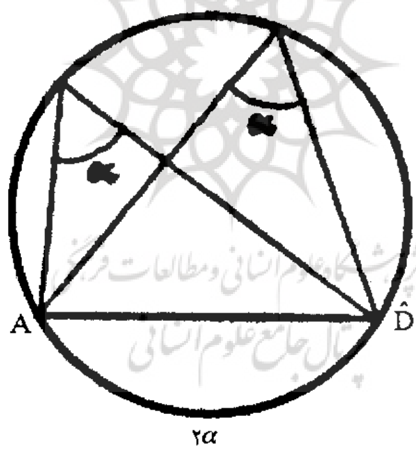
در نتیجه $GK = AC$ و $AC = GC$ و نیز داریم $FK=AC$ و $KE(=GK)=CB$

حال در معادلهٔ فوق، مقادیر مساوی را جایگزین می‌کنیم:

$$CB.CD=AC^2$$

و بدین ترتیب ادعاهای (I) و (II) اثبات می‌شود.

حال خوانندهٔ کم طاقت ممکن است در صدد یافتن ارتباط این موضوع با هفت ضلعی منتظم باشد. این ارتباط پس از بیان قضیهٔ زیر، شرح داده می‌شود.

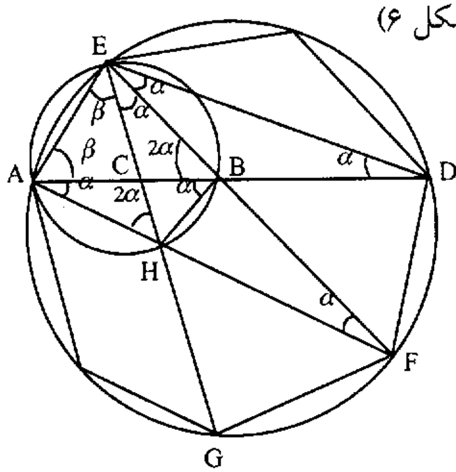


شکل ۶

قضیه: از هر نقطه، چون p، واقع در یک طرف خط داده شدهٔ AB، زاویهٔ داده شدهٔ α و وتر AB می‌توان یک دایره گذراند که کمان AB، برابر ۲α باشد.

(بعبارت دیگر در هر دایره زوایای واقع در یک طرف وتر با هم برابر و مساوی

نصف کمان روبروی آنهاست). (شکل ۶)



(شکل ۷)

در شکل (۷)، AD خطی است که در شکل (۵) نشان داده شد با دو خاصیت

i) $AB.AC=BD^2$

ii) $CB.CD=AC^2$

حال E را چنان انتخاب می‌کنیم که CE=CA و BE=BD.

از سه نقطهٔ A، E و D یک دایره می‌گذرانیم و ادعا می‌کنیم که AE یک ضلع هفت‌ضلعی منتظم محاط در این دایره است.

اثبات آنرا در زیر ارائه می‌دهیم.

مثلث EBD متساوی‌الساقین است $\Rightarrow$ $B\hat{D}E = B\hat{E}D = \alpha$, $(BE = BD)$

مثلث ACE متساوی‌الساقین است $\Rightarrow$ $A\hat{E}C = E\hat{A}C = \beta$, $(AC = CE)$

ضلع EB و EC را امتداد می‌دهیم تا دایره را در F و G قطع کند و نیز AF را رسم کرده، تقاطع آن را با EG، H می‌نامیم. H را به B وصل می‌کنیم.

کمان مقابل به هر زاویهٔ محاطی دوبرابر آن است و چون $B\hat{E}D=\alpha \Leftarrow DF=2\alpha$ و نیز $AE = 2\alpha$.

$F\hat{A}D = \alpha \Rightarrow \hat{F} = \hat{A} = \alpha$

از طرفی $E\hat{B}D = 180 - E\hat{B}A$ ($E\hat{B}A$ مکمل $E\hat{B}D$ است) و چون

حال شرط (ii) را اعمال می‌کنیم: $E\hat{B}A = 2\alpha$ پس $E\hat{B}D = 180 - 2\alpha$

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{CD}{AC} = \dfrac{AC}{CB}\\ AC = CE\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{CD}{CE} = \frac{CE}{CB}$$

در نتیجه $\overset{\Delta}{\hat{B}EC} \sim \overset{\Delta}{\hat{E}DC}$ (زاویهٔ C در هر دو مشترک است و رابطهٔ فوق بین اضلعشان برقرار است). بنابراین:

$$C\hat{D}E = B\hat{E}C = \alpha \Rightarrow GF = 2\alpha = AE = DF$$

$$E\hat{A}C = C\hat{E}A = \beta \Rightarrow ED = AG = 2$$

اگر نشان دهیم $\beta = 2\alpha$ اثبات به پایان می‌رسد. چراکه خواهیم داشت AE یک هفتم کل دایره است.

برای اثبات، ملاحظه می‌کنیم که وتر HB روبروی زوایای $H\hat{A}B, H\hat{E}B$ است پس بنابر قضیه می‌توان از A و E که در یک طرف پاره‌خط HB واقعند یک دایره گذرا که HB وتر آن باشد و $\hat{A} = \hat{E} = \alpha$ به عبارت دیگر چهار وجهی AHBE قابل محاط شدن است.

در این دایره β روبرو به کمانهای AH و EB است پس وتر AH با وتر EB برابر است. و نیز زاویهٔ H روبرو به وتر AE برابر است با زاویهٔ B روبرو به همان وتر برابر با 2α، در نتیجه $A\hat{H}E = 2\alpha$ است

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{AB}{BD} = \dfrac{BD}{AC}\\ EB = BD = AH\\ AC = EC\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{EB}{EC} \Rightarrow \overset{\Delta}{\hat{E}BC} \sim \overset{\Delta}{\hat{A}BH}$$

$B\hat{A}H = B\hat{E}C = \alpha \Rightarrow \gamma = 2\alpha$، در نتیجه $\beta = \gamma = 2\alpha$ (هر دو زاویه رو به وتر AH است.) و کمانهای ED و AG برابر با 4α است.

پس کل کمانها برابر است با ۱۴α و کمان AE یک هفتم کل کمانهاست.

به این ترتیب هفت ضلعی منتظم درون یک دایره محاط شد.

۴ ـ نقد روش ارشمیدس توسط ابن هیثم

ابن هیثم فیزیکدان و هندسه دان برجستهٔ سالهای ۹۶۵ـ۱۰۳۹ میلادی به دنبال کاربر روی هفت ضلعی منتظم ارشمیدس، بوسیلهٔ مقاطع مخروطی موفق به رسم هفت ضلعی شد. وی در بیانیهٔ خود در زمینهٔ مقدمات (ساخت) هفت ضلعی منتظم محاط در دایره، چنین می‌گوید:

«ارشمیدس اساس ساخت هفت ضلعی منتظم را بر مربعی استوار کرده که چگونگی بدست آوردنش را نمی‌دانیم. روش او برای ما مشخص نیست چراکه تنها راه ممکن برای بدست آوردن مربعی با مشخصات داده شده به وسیلهٔ مقاطع مخروطی امکان‌پذیر می‌شود».[۳]

ابن هیثم با فرض داشتن مربع مفروض ارشمیدس، با استفاده از مقاطع مخروطی به روشی برای رسم آن مربع دست یافت.

وی از تقاطع سهمی و هذلولی (ابن هیثم فقط بخش مثبت هذلولی را در نظر گرفته).

برای تقسیم خط با خصوصیات بیان شدهٔ ارشمیدس بهره برد.

۴ـ ۱ ـ روش ابن هیثم در ساخت هفت ضلعی منتظم[۴]

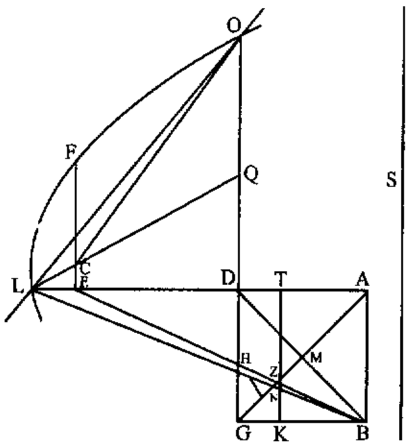
صورت مسأله، در واقع چنین است:

رسم خط راستی در مربع ABGD که از B، بگذرد و قطر AG را در Z و GD را

3. Hogendijk, J.P. *Ibn al Haitham's completion of the conics*, p. 60
sources in the history of mathematics and phisical sciences, Springer-verlag.

۴. این بخش در واقع ترجمه‌ای است از برخی قسمتهای بخش چهارم مقالهٔ Hogendijk:
"Greek and Arabic conustructions of the regular heptagon"

در H و امتداد AD را در E چنان قطع کند که $\overset{\Delta}{B}ZG = \overset{\Delta}{D}HE$ (شکل ۸).



شکل ۸

چنین مربعی همراه با خط BZHE برای رسم یک هفت ضلعی منتظم کافی خواهد بود.

اثبات:

فرض کنیم ABGD مربع مفروض باشد و BHZE خطی راست باشد چنان که $\overset{\Delta}{B}ZG = \overset{\Delta}{D}HE$.

BD را رسم کنیم تا AG را در M قطع کند. خواهیم داشت:

$$AZDH=\overset{\Delta}{A}MD+MZDH=\overset{\Delta}{B}MG+MZDH=\overset{\Delta}{B}ZG+\overset{\Delta}{B}HD$$

$$\overset{\Delta}{B}ZG=\overset{\Delta}{D}HE\Rightarrow\overset{\Delta}{B}ZG+\overset{\Delta}{B}HD=\overset{\Delta}{B}HE+\overset{\Delta}{B}HD=\overset{\Delta}{B}ED\Rightarrow AZHD=\overset{\Delta}{B}ED$$

فرض کنیم L، روی امتداد AE باشد چنانکه $\overset{\Delta}{G}HZ=\overset{\Delta}{B}LE$ آنگاه:

$\overset{\Delta}{B}LD=\overset{\Delta}{B}LE+\overset{\Delta}{B}ED=\overset{\Delta}{G}HZ+AZHD=\overset{\Delta}{G}DA$ و از آنجاکه $BG \,||\, AL$ و $AB = GD$ ارتفاعهای برابر وارد بر دو قاعده، AD, DL است داریم: $AD=DL$

بعلاوه میتوان نتیجه گرفت:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{G}HZ = \overset{\Delta}{B}LE \\ \overset{\Delta}{G}DA = \overset{\Delta}{B}LD\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\overset{\Delta}{B}LD}{\overset{\Delta}{B}LE} = \frac{\overset{\Delta}{G}DA}{\overset{\Delta}{G}HZ}$$

$$\frac{\overset{\Delta}{B}LD}{\overset{\Delta}{B}LE} = \frac{DL}{EL} \text{ و } \frac{\overset{\Delta}{G}DA}{\overset{\Delta}{G}HZ} = \frac{GD.GA}{GH.GZ}$$

ابن هیثم فرمول اخیر را توسط رسم خط عمود AG بر HN چنین اثبات می‌کند:

$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{G}HZ=\frac{1}{2}HN.GZ \\ \overset{\Delta}{G}DA=\frac{1}{2}DM.GA\end{array}\right\}\begin{array}{l}\frac{\overset{\Delta}{G}DA}{\overset{\Delta}{G}HZ}=\frac{DM.GA}{HN.CZ} \\ \frac{DM}{HN}=\frac{CD}{GH}\end{array}\Bigg\} \Rightarrow \frac{\overset{\Delta}{G}DA}{\overset{\Delta}{G}HZ} = \frac{GD.GA}{GH.GZ} = \frac{DL}{LE}$$

حال خط $KZT \parallel BA$ را رسم می‌کنیم. آنگاه:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{GD}{GH} = \frac{BE}{BH} = \frac{AE}{AD} \\ \frac{GA}{GZ} = \frac{BE}{BZ} = \frac{AE}{AT}\end{array}\right\} \Rightarrow \frac{GD.GA}{GM.GZ} = \frac{AE}{AD.AT}$$

چنان که دیدیم ارشمیدس ثابت کرد که:

$$\overset{\Delta}{B}ZG = \overset{\Delta}{D}HE \Rightarrow AD.AT = DE^2 \Rightarrow \frac{DL}{LE} = \frac{AE^2}{DE^2}$$

بنابراین مساله این است که پاره‌خط LEDA را چنان رسم کنیم که:

۱- $AD = DL$ و ۲- $\frac{DL}{LE} = \frac{AE^2}{DE^2}$

مساله را حل شده می‌انگاریم. خطوط EF و DO را عمود بر AL چنان رسم می‌کنیم که: $EF = ED$ و $s.DO^2 = AE$ را چنان پاره‌خطی در نظر می‌گیریم که،

$DO = s.DL$، پس بنابر (P1)، O روی یک سهمی است با راس L، محور LD و پارامتر s.

$$\left.\begin{array}{l} DO^2 = s.DL \\ \dfrac{DO^2}{FE^2} = \dfrac{AE^2}{DE^2} = \dfrac{DL}{EL} \end{array}\right\} \Rightarrow FE^2 = s.EL$$

بنابراین سهمی از F هم عبور می‌کند.

Q را چنان روی DO انتخاب می‌کنیم که $DQ = DL$ خط LQ را رسم می‌کنیم تا FE را در C قطع کند مثلث LQD معلوم است $(QD = DL, QDL = 90°)$ بنابراین زاویهٔ $\hat{O}QC$ معلوم است. $(\hat{O}QC = 135°)$ .OC را رسم می‌کنیم.

$$\frac{QC}{DE} = \frac{QL}{DL} \Rightarrow \frac{QC}{DE} = \sqrt{2}$$

$$OD = AE,\ QD = DL = AD \Rightarrow DQ = DE \Rightarrow \frac{QC}{OQ} = \sqrt{2}$$

با معلوم بودن این نسبت، مثلث OQC معلوم خواهد بود و نیز نسبت $\dfrac{CO}{CQ} = \sqrt{5}$

از طرف دیگر $OQ = DE = FE \Rightarrow \dfrac{CO^2}{FE^2} = 5$ و نیز بنابر قانون کسینوسها

$$FE^2 = s.EL \Rightarrow \frac{CO^2}{s.EL} = 5$$

داریم: $Cos\ (OCQ) = \dfrac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \varphi = OCQ = 18°\ 26$ پس O روی یک سهمی گذرنده از L با قطر LQ و پارامتر $\dfrac{5s}{\sqrt{2}}$ و زاویه عرض φ، واقع است.

فرض کنید L معلوم باشد و پاره‌خطی مشخص داشته باشیم، ولی D معلوم نباشد.

هردو سهمی معلومند بنابراین نقطه تقاطع آنها، D، معلوم است و نیز خط عمود OD و نقاط تقاطع آن با LD، LQ، D، Q (زاویه $QLD = 45$).

$AD=DL$ و $DE = OQ$ بنابراین E و A معلومند و حل مساله پایان می‌یابد.

۴ـ۲ روش دوم ابن هیثم (IH2)

در این روش، برای حل مشکل ارشمیدس، ابن هیثم از تقاطع سهمی و هذلولی استفاده می‌کند. این روش در فصلی[5] که او درباره هفت ضلعی منتظم نگاشته، آمده است و نیز در رساله ابن‌هیثم[6] به عنوان چهارمین ساخت مطرح شده است. مورد نخست توسط **راشد** ویراستاری و توسط (Schoy) به آلمانی ترجمه شده است.

متن عربی رساله نیز توسط رُشدی راشد ویراسته شد و به فرانسه ترجمه گردید.[۷]

استدلال او در تحلیل زیر بسیار روشن است.

فرض کنیم که $AGDB$ چنان است که: $AD.GD = DB^2, GB.DB = AG^2$

از G عمود GX را برابر با AG رسم می‌کنیم. آنگاه $GB.DB = GX^2$ و بنابراین X روی یک سهمی با رأس B محور DB و پارامتر DB است. (P1)

Q را چنان روی امتداد BD قرار می‌دهیم که $DQ = DB$. از D,Q دو عمود DR,QS را چنان رسم می‌کنیم که $DR = QS = DB$ (شکل ۹). QR,DS را رسم می‌کنیم. XG را امتداد می‌دهیم تا DS را در Y قطع کند. از X خطی موازی YD رسم می‌کنیم تا امتداد DR را در Z قطع کند. آنگاه

$$\frac{GY}{GD} = \frac{QS}{QD}$$
$$QS = QD$$

5. "chapter by Al-Hasan ibn al-Haitham on the Lemma for the side of heptagon". *GAS V, 367, 14*

6. "Treatise by Al-Hasan ibn al-Haitham on the construction of the Heptagon in the Circle" *GAS V, 367, 13.*

7. R.Rashed, "La construction de Iheptagon regular par Ibn-al-Haitham." *Journal for history of Arabic Science* 3/1979/309-387.

و خواهیم داشت:

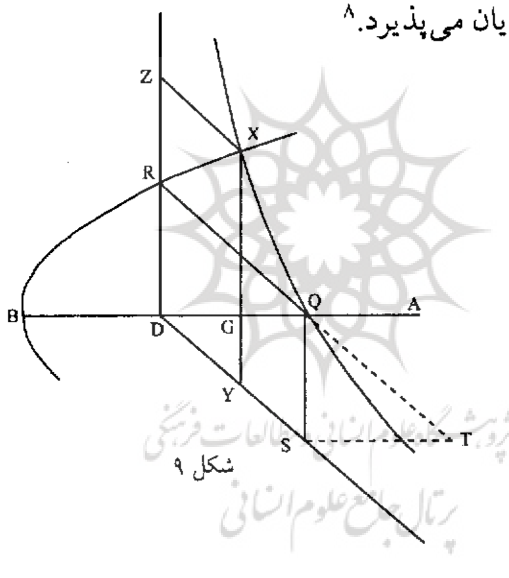
$$\left.\begin{array}{l} AD.GD = DB^2 \\ XY = AD \end{array}\right\} \Rightarrow XY.GD \Rightarrow QS = Q.D$$

$$DB = QD = QS$$

$$\frac{GD}{XZ} = \frac{QD}{QR} \Rightarrow XY.XZ = QS.QR$$

بنابراین X روی یک هذلولی است با مجانبهای DS,DR که از Q می‌گذرد.

با فرض این که B,D معلوم است، R,Q,S معلوم خواهد بود و بنابراین سهمی هذلولی و در نتیجه X و نیز عمود XG معلوم است. پس G و A مشخص می‌شود. (زیرا AG = XG). تحلیل پایان می‌پذیرد.[۸]



شکل ۹

۴ـ۳ سه روش دیگر ابن هیثم (IH3,IH4,IH5)

ساخت IH3,IH4,IH5 و IH2 «رساله» ابن هیثم را تشکیل می‌دهد. او توضیح می‌دهد که چگونگی ساخت هفت ضلعی منتظم می‌تواند به ساخت یکی از ۴ مثلث زیر مرتبط باشد: (برای $\alpha = 180/7$)

---

۸. اگر DQ، محور Xها و DR محورها باشد و $|DB| = c$ آنگاه سهمی $y^2 = c(x+c)$ و هذلولی $x(y+x)=c^2, x>0$ خواهد بود.

۱ ـ با زوایای $3\alpha,3\alpha,\alpha$

۲ ـ با زوایای $2\alpha,3\alpha,2\alpha$

۳ ـ با زوایای $\alpha,5\alpha,\alpha$

۴ ـ با زوایای $4\alpha,2\alpha,\alpha$

وی بدرستی بیان می‌کند که تنها مثلثهای ممکن با زاویهٔ α این ۴ نوعند و سپس ساخت آنها را با ساخت پاره‌خطهای زیر مرتبط می‌سازد:

۱ ـ AEDC چنان که $EC^2 = AC.DC = AD.ED$ (IH3)

۲ ـ CDBE چنان که $CB.DB = CD.CE = BE^2$ (IH4)

۳ ـ CDEB چنان که $CB.CD = EB^2, DB.DE = CD^2$ (IH5)

۴ ـ AGDB چنان که $AD.GD = DB^2, GB.DB = AG^2$ (IH2)

در تحلیل IH3، ابن هیثم نقاط C,E را معلوم فرض کرده، عمود $DK = AC$ را رسم می‌کند. ثابت می‌شود K نقطهٔ تقاطع دو هذلولی است با مجانبهای معلوم که هر کدام از آنها از نقطه‌ای معلوم می‌گذرند.

در تحلیل IH4 او B,E را معلوم فرض کرده، عمود $DG = BC$ را رسم می‌کند. ثابت می‌شود G نقطهٔ تقاطع دو هذلولی است با مجانبهای معلوم که هرکدام از آنها از نقطه‌ای معلوم می‌گذرند.

در تحلیل IH5، وی C,D را معلوم فرض کرده، عمود $BH = CE$ را رسم می‌کند معلوم می‌شود H نقطهٔ تقاطع یک سهمی و یک هذلولی است با مجانبهای معلوم که هرکدام از آنها از نقطه‌ای معلوم می‌گذرد.

سه روش فوق مشابه دو روشی که در ۴ ـ ۱ و ۴ ـ ۲ شرح داده شده قابل تحلیل است. از این رو به شرح آن نمی‌پردازیم.

نتیجه:

چنان که دیدیم مشکل اساسی در روش ارشمیدس چگونگی تقسیم پاره‌خط با شرایط بیان شده است.

ابن هیثم با پی بردن به این مشکل درصدد حل آن برآمد. بدین منظور او همچون

بیشتر ریاضیدانان اسلامی، نظیر ابن جود، کوهی و...، از خواص مقاطع مخروطی بهره جست.

روش نخست او، که با استفاده از تنها یک نقطهٔ معلوم، متمایز از سایر روشهاست چنان که دیدیم با مفروض دانستن پاره‌خط s و تقاطع دو سهمی چگونگی تقسیم پاره‌خط مفروض را نشان می‌دهد.

او در روشهای دیگر، از تقاطع یک سهمی و یک هذلولی و معلوم بودن دو نقطه و یا تقاطع دو هذلولی پاره‌خط مذکور را تقسیم می‌کند.

هوخندایک که در مقالهٔ خود «ساخت‌های عربی و یونانی هفت‌ضلعی منتظم» روشهای گوناگون ترسیم هفت‌ضلعی منتظم را بررسی کرده است، روش نخست ابن هیثم را تحلیل و تفسیر کرده و از آن در برابر نقد رشدی‌راشد، که این روش ابن هیثم را نوعی مصادره به مطلوب می‌داند، دفاع می‌کند.

در این روشها حتی با استفاده از مقاطع مخروطی، حداقل به دو نقطهٔ معلوم و یا یک نقطه و پاره‌خط معلوم نیاز است. بنابراین ساخت هفت ضلعی منتظم، با خط کش غیر مدرج و پرگار، با تنها یک نقطهٔ معلوم میسر نخواهد بود و تنها مقاطع مخروطی است که چنین امکانی را فراهم می‌سازد.

ضمیمهٔ ۱:

ـ راه حل جبری برای حل مسائل هندسی:

در این قسمت راه حل جبری ۳ مسألهٔ اساسی را که ریاضیدانان در طول ۲۰۰۰ سال به دنبال حل آنها بوده‌اند بررسی می‌کنیم. این ۳ مسأله عبارتند از:

۱ ـ دو برابر کردن مکعب، رسم یک مکعب که حجمش ۲ برابر مکعب داده شده باشد.

۲ ـ تثلیث زاویه، تقسیم یک زاویهٔ داده شده به ۳ قسمت مساوی.

۳ ـ رسم هفت ضلعی منتظم محاط در دایره.

این مسائل در طول ۲۰۰۰ سال بارها مورد بررسی قرارگرفت و باگذشت زمان و افزایش تعداد کسانی که در این زمینه ناموفق بودند به مسائلی حل ناشدنی تبدیل می‌شد که در قرن ۱۹ توسط گاوس روشی جبری برای حل آنها ارائه شد. محدودیت استفاده از پرگار و خط‌کش غیر مدرج مشکل اصلی این مسائل بود.

اثبات این مسائل متکی بر معادلات جبری و بخصوص معادلات درجهٔ ۳ است. برای بررسی چگونگی حل جبری آنها، ابتدا خاصیت معادلات درجهٔ ۳ را بیان می‌کنیم.

ـ خاصیت معادلات درجهٔ ۳:

وانتزل وگاوس برای حل مسائل مذکور از این خاصیت بهره جستند.

لم:

فرض کنید $P(X)$ معادلهٔ درجهٔ ۳ با ضرایب صحیح باشد.

$$P(X) = a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0 = 0$$

آنگاه $P(x)=0$ یا یک ریشهٔ حقیقی دارد یا هیچ‌کدام از ریشه‌هایش قابل ساخت نیست.

این لم با استفاده از توسیع Q اثبات می‌شود.

برای نمونه می‌توان معادلهٔ درجهٔ ۳ ساده زیر را در نظر گرفت:

$$x^3 - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (x-1)(x^2 + x + 1) = 0 \Rightarrow x = 1, x^2 + x + 1 = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{(-1)3}}{2} = \left(\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\right), i = \sqrt{-1}$$

به وضوح درمی‌یابیم که i عدد حقیقی نیست. به i عدد موهمی گوییم. پس ریشه‌های $x^3-1=0$ برابر است با $-\frac{1}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right), -1 - i\frac{\sqrt{3}}{2}$ که 1 جز ۱ دو ریشهٔ دیگر جبری نیستند.

ـ دوبرابر کردن مکعب:

مکعبی با ضلع ۱ راکه حجم آن ۱ است در نظر می‌گیریم. هدف، رسم مکعبی با حجم ۲ است. سالها به دنبال ساخت چنین مکعبی بوده‌اند تا ثابت شد که چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

از نظر جبری، مسأله، پیداکردن ریشه‌ای گویا برای معادلهٔ $x^3 = 2$ است.

برای نشان دادن غیر ممکن بودن وجود چنین ریشه‌ای از لم قبل استفاده می‌کنیم.

کافی است نشان دهیم که معادلهٔ $x^3 = 2$ ریشهٔ گویا ندارد.

فرض کنیم چنین ریشه‌ای موجود باشد. قرار می‌دهیم $x = \frac{p}{q}$ آنگاه خواهیم داشت:

$\frac{p^3}{q^3} = 2$ یا $p^3 = 2q^3$ جایی که $(p,q)=1$ یعنی p و q نسبت به هم اولند. این تساوی امکان‌پذیر نیست زیرا $p^3 = 2q^3$ بیانگر این مطلب است که p بر q قابل قسمت است که خلاف فرض $(p,q)=1$ است به عبارت دیگر طرف چپ معادله حاصل ضرب k عدد اول است که k بر ۳ قابل قسمت است در حالیکه طرف دوم حاصل ضرب $k+1$ عدد اول غیر قابل قسمت بر ۳ است که این امکان‌پذیر نیست.

تناقض، حاصل شده در نتیجه معادلهٔ $x^3 = 2$ هیچ ریشهٔ گویای ندارد. پس چنین مکعبی قابل ترسیم نیست.

ـ تثلیث زاویه:

هدف ثابت کردن این مسأله است که هیچ زاویه‌ای را نمی‌توان تنها توسط خط‌کش و پرگار به ۳ قسمت مساوی تقسیم کرد.

بدون کاسته شدن از کلیت مسأله، ثابت می‌کنیم زاویهٔ ۶۰ درجه قابل تثلیث نیست. در حالت کلی نیز با محاسباتی پیچیده‌تر این مسأله اثبات می‌شود.

لم: رسم یک زاویهٔ حاده هم ارز است با رسم یک مثلث قائم‌الزاویه با زاویهٔ حادهٔ

داده شده. با استفاده از فرمولهای مثلثاتی داریم:

$Cos3a = CosaCos2a - SinaSin2a = 4Cos^3a - 3Cosa$

برای $a=20$ داریم: $Cos3a = Cos\ 60° = \frac{1}{2}$ و معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$8Cos^3a - 6Cosa - 1 = 0$

با جایگزینی x به جای Cosa خواهیم داشت:

$8x^3 - 6x - 1 = 0$

قرار می‌دهیم $y=2x$ خواهیم داشت:

$y^3 - 3y - 1 = 0$

کافی است نشان دهیم که این معادله ریشهٔ گویا ندارد. به عبارت دیگر کلیهٔ ریشه‌های آن غیر جبری است. فرض کنیم چنین ریشه‌ای موجود باشد، $y=\frac{p}{q}$ آنگاه خواهیم داشت:

$p^3 - 3p\,q^2 - q^3 = 0 \Rightarrow p(p^2 - 3q^2) - q^3 = 0 \Rightarrow (p / q^3)$ قابل قسمت است p بر q^3 به عبارت دیگر p، q^3 را عاد می‌کند.

اگر p، ۱ یا ۱- نباشد، p را می‌توان بصورت حاصلضرب اعداد اول نوشت که هر کدام بر q قابل قسمتند، در نتیجه p باید ۱ یا ۱- باشد زیرا q و p نسبت به هم اولند.

از طرف دیگر معادلهٔ فوق را می‌توان به صورت $q(3pq+q^2)=p^3$ نوشت که با استدلال مشابه داریم ۱- یا ۱+ = q. در نتیجه تنها ریشه‌های گویای ممکن برای معادله ۱ یا ۱- است.

با قرار دادن این مقادیر در معادله خواهیم داشت:

$p=-1,\ q=-1:\ -1+3-1=1$ $p=1,\ p=1:\ 1-3-1=-3$

$p=1,\ q=-1:\ 1+3-1=3$ $p=-1,\ q=1:\ -1+3-3=-1$

که هیچ یک معادله را ارضا نمی‌کنند پس این معادله هیچ ریشهٔ گویایی ندارد پس قابل ساخت نیست.

ـ ساخت هفت ضلعی منتظم:

ساده‌ترین راه برای اثبات ناتوانی در ساخت هفت ضلعی منتظم محاط در دایره توسط خط کش و پرگار، استفاده از اعداد مختلط است.

رؤوس هفت ضلعی منتظم، محیط دایرهٔ واحد را به هفت قسمت مساوی تقسیم می‌کند. این خصوصیت با معادلهٔ تقسیم دایره بیان می‌شود که رئوس هفت ضلعی ریشه‌های معادلهٔ $Z^7=1$ می‌باشند. این معادله به وضوح با $Z=1$ ارضا می‌شود. پس داریم.

$$\frac{z^7-1}{z-1}=z^6+z^5+z^4+z^3+z^2+z+1 \quad (I)$$

که $z=x+iy=\mathrm{Cos}\theta+i\mathrm{Sin}\theta$ و نیز داریم: $z^n=\mathrm{Cos}n\theta+i\mathrm{Sin}\, n\theta$ پس به‌ازای $\theta=360^\circ / 7$ داریم: $Z = \mathrm{Cos}(\frac{360}{7}) + i\mathrm{Sin}(\frac{360}{7})$. نشان می‌دهیم که زاویهٔ $\frac{360^\circ}{7}$ قابل رسم نیست.

در معادلهٔ (۱) به‌جای $z+\frac{1}{z}$، x قرار می‌دهیم و آن را به معادلهٔ درجهٔ ۳ زیر تبدیل می‌کنیم:[۹]

$$x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0 \quad (II)$$

همچون مسائل گذشته فرض می‌کنیم معادلهٔ (II) یک ریشهٔ گویا داشته باشد. $x=\frac{p}{q}$ آنگاه از یک طرف $p(p^2+pq-2q^2)=q^3$ و از طرف دیگر $q(q^2-p^2+2pq)p = p^3$ و در نتیجه $q=\pm 1$ و $p=\pm 1$ و طبق مسأله قبل این غیر ممکن است پس معادلهٔ (II) هیچ ریشهٔ گویایی ندارد و در نتیجه معادلهٔ (I) هیچ ریشهٔ گویایی نداشته، قابل رسم نیست.

---

۹. چگونگی بدست آوردن معادلهٔ مذکور:

$$(z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1) / z^3 = 0$$

$$(z + \frac{1}{z})^3 - 3(z + \frac{1}{z}) + (z + \frac{1}{z})^2 + (z + \frac{1}{z}) - 1 = 0$$

ضمیمه ۲:

چند ضلعیهای منتظم قابل محاط شدن در دایره

گاوس از طریق معادلات ثابت کرد که تنها، n ضلعیهای خاصی بوسیلهٔ خط کش و پرگار قابل محاط شدن است و خود، ۱۷ ضلعی را رسم کرد.

n ضلعیهایی قابل محاط شدن هستند که:

۱ ـ اگر n عددی اول باشد، عدد اول فرما باشد. این اعداد عبارتند از:

۶۵۵۳۷، ۲۵۷، ۱۷، ۵، ۳ و همانطورکه در تعریف آمده عددی اول بزرگتر از آن یافت نشده.

۲ ـ اگر n فرد و غیر اول باشد باید داشته باشیم: $n = F_0 \dots F_k$ یعنی باید بتوان n را به صورت حاصلضرب اعداد اول فرما نوشت. بعنوان ۵×۳=۱۵، ۱۷×۳=۵۱.

۳ ـ اگر n زوج باشد، باید داشته باشیم: $n = 2^{n} F_0 \dots F_k$ که از طریق دوبرابر کردن متوالی هر یک از اعداد مذکور در شماره‌های فوق حاصل می‌شود.

(۱،۲) و ۴ و ۸ و ۱۶ و ۳۲ و ۶۴ و ....

۳ و ۶ و ۱۲ و ۲۴ و ۴۸ و ...

۵ و ۱۰ و ۲۰ و ۴۰ و ۸۰ و ...

۱۵ و ۳۰ و ۶۰ و ۱۲۰ و ...

۱۷ و ۳۴ و ۶۸ و ...

۵۱ و ...

۸۵ و ...

با استفاده از مثلث خیام می‌توان اعداد فرد قابل رسم فوق را در مبنای ۲ نمایش داد.

در سطرهای نخستین می‌توان اعداد زیر را مشاهده کرد:

۱، ۳، ۵، ۱۷، ۵۱، ۸۵، ۲۵۵، ۲۵۷، ...

n	α	β	$\frac{a}{R}$	طریق محاسبهٔ $\frac{a}{R}$
۳	۱۲۰	۶۰	۱/۷۳۲۰۵۰۸	$\sqrt{3}$
۴	۹۰	۹۰	۱/۴۱۴۲۱۳۶	$\sqrt{2}$
۵	۷۲	۱۰۸	۱/۱۷۵۵۷۰۵	$(\sqrt{5}-\sqrt{5})\|2$
۶	۶۰	۱۲۰	۱	1
۸	۴۵	۱۳۵	۰/۷۶۵۳۶۶۹	$(\sqrt{2}-\sqrt{2}$
۱۰	۳۶	۱۴۴	۰/۶۱۸۰۳۴۰	$(\sqrt{5}-1)\|2$
۱۲	۳۰	۱۵۰	۰/۵۱۷۶۳۸۱	$(\sqrt{3}-1)\|2$
۱۵	۲۴	۱۵۶	۰/۴۱۵۸۲۳۴	$(\sqrt{3}\sqrt{1-\sqrt{5}}+\sqrt{2}\sqrt{5+\sqrt{5}})\|4$
۲۰	۱۸	۱۶۲	۰/۳۱۲۸۶۸۹	$[\sqrt{2}(1+\sqrt{5}-2\sqrt{5-\sqrt{5}})]\|4$
۲۴	۱۵	۱۶۵	۰/۲۶۱۰۵۲۴	$\sqrt{(4-\sqrt{2}-\sqrt{6})}\|2$
۳۰	۱۲	۱۶۸	۰/۲۰۹۰۵۶۹	
۴۰	۹	۱۷۱	۰/۱۵۶۹۱۸۲	
۶۰	۶	۱۷۴	۰/۱۰۴۶۷۱۹	
۱۲۰	۳	۱۷۷	۰/۰۵۲۳۵۳۹	

منابع و مآخذ

1. Aaboe, Asger "Archimedes Construction of the Regular Heptagon" *in Episodes from the early* history of mathematics (1964).

2. Hogendijk, J.P. *Ibn al Haitham's Completion of the conics* ,sources in the history of mathematics and Physical sciences, springer-verlag.

3. Hogendijk, J.P. "Greek and Arabic constructions of the regular heptagon", *Archieve of exact sciencs* 30(1984), pp. 197-330.

4. ibn al-Haitham, Al-Hasan, "chapter on the Lemma for the side of the heptagon", *GAS V,367,14*

5. ibn al-Haitham, Al-Hasan, "chapter on the Lemma for the side of the heptagon in the Circle", *GAS V, 367, 13.*

6. Rashed, R, "La construction de lheptagon regular par Ibn-al-Haitham", *Journal for history of Arabic Science 3/1979/309-387*