طریقه تدریس مثلثات

درمدارس متوسطه

بقلم آقای حسام زاده پازارگاد

کلیات

خصوصیات این علم — برای وضوح طریقهٔ تدریس و تدوین کتاب درسی هر علم باید ابتدا در خصوصیات آن علم غور نموده وبنحو مقدمه محاسن ومعایب آن علم رااز نظر پدا گوژی و بمنظور تدریس و تعلیم درنظر آوریم. محاسن ومعایب علم‌مثلثات را با مقایسه بسایر شعب ریاضیات متوسطه ازنظر تدریس وتعلیم میتوان باختصار بنحو ذیل بیان نمود:

محاسن این علم ازنظر تعلیم وتعلم

۱ - فوائد این علم در صنعت وعمل بسیار و فی‌الحقیقه از تمام شعب ریاضی متوسطه موارد استعمالش بیشتر و دامنهٔ این علم از حیث نتایج عملی بسیار وسیع و بهمین لحاظ در میان علوم ریاضی برای محصلین متوسطه نیز بیش از سایر شعب جالب توجه و لذت بخش است و این خاصیت فنی علم مثلثات نه تنها محدود بقسمت دورهٔ تدریس آن در متوسطه است. — مثلثات در کلیهٔ علوم طبیعی ودرتمام فنون وصنایعیکه منشعب ازعلوم ریاضی وطبیعی ومکانیك است وظیفهٔ مهمی را عهده دار بوده و مورد استعمال دارد لهذا آنرا «ستون فقرات ریاضیات عملی» نام نهاده اند.

سیمون میگوید: این‌علم نه‌تنها برای مساحان و بحرپیمایان و کحالان و مهندسین‌مکانیك و الکتریك ضروری و لازم شمرده میشود بلکه بمناسبت اینکه از حیث شکل بسیار قابل بسط و قابل انحناء و ارتجاع میباشد برای (انالیست) آینده بهترین کلاس تهیه است.

۲ - تحصیل مثلثات زمینهٔ مناسبی برای تربیت دقت وصحت عملیات وعادت دادن محصل به دقت وصحت در عملیات بدست میدهد.

۳-علم‌مثلثات بالنسبه آسان و اکثرمباحث آن برای شاگردان‌جوان‌مطبوع ولذت‌بخش‌است.

معایب این علم ازنظر تعلیم و تعلم

۱ - انتظام مباحث این علم بالنسبه قلیل و کمتر از سایر شعب ریاضی تابع قوانین کلی میشود باینمعنی که فرا گرفتن این علم باید بیشتر بوسیلهٔ تمرین وممارست وحل مسائل انجام گیرد و کمتر از سایر علوم ریاضی متوسطه میتوان مباحث و مسائل آنرا در تحت دستور های کلی منظم و طبقه بندی نمود.

۲ — تحصیل علم مثلثات بیشتر از علم جبر و هندسه محتاج بقوهٔ حافظه بوده و وظائف حفظی آن بیشتر است.

کتب تدریس مثلثات — ازآنچه که از خصوصیات این‌علم در فوق‌اشاره شدمیتوان

اصول لازمه را که برای انتخاب موضوعات کلاسی جهة تدریس این علم در کلاسهای دورهٔ دوم متوسطه علمی لازم است استنباط نمود ورعایت دواصل ذیل درتدوین کتاب درسی این علم واجب است وهمچنین معلم این علم بایدهنگام تدریس این نکات را مراعات نماید :

اولا ـ باید بکلیهٔ قسمتهائی از مثلثات که در حل مسائل عملی مورد احتیاج و استعمال است یا غیر مستقیم منتهی باینگونه استعمالات میگردد اهمیت بسیار داده ودرتدریس اینگونه مباحث وفصول توجه مخصوص مبذول داشت .

ثانیا ـــ مباحثی را که درك و تسلط برآنها محتاج باستعمال قوهٔ حافظه وضبط در دماغ است ومباحثی را که موارد استعمال عملی ندارد یا قلیل است باید حتی‌الامکان مختصر کرده وبرای محصلین متوسطه تا آنجا که ممکن است مطالب را خلاصه نمود .

پس از اصل اول چنین استنباط میشود که باید در تدریس مثلثات بقسمتهای حل مثلث قائم‌الزوایا و حل عمومی مثلثات دیگر و محاسبهٔ ارتفاعات و مسافات و نظائر آن اهمیت داد ـ واز اصل ثانی چنین نتیجه میشود که فرمولهای حفظ کردنی مثلثاتی را باید تقلیل داده تعداد آنرا به مینیموم وحد اقل رسانید و بسیاری از فصول را که صورت حشو و زوائد دارد دردورهٔ متوسطه بکلی حذف نمود ـ مثلا از ذکر توابع جیب معکوس « Versin o » وجیب تمام معکوس« Covers o » باید بکلی صرف نظر و قطر ظل « Sec» وقطر ظل تمام « Cosec » را کمتر استعمال نمود و در عملیات مقتضی است که از استعمال دو تابع اخیرالذکر اجتناب و صرف نظر کرد . فعلا تقریبا در تمام قارهٔ اروپا استعمال « Sec و cosec » را تقریبا بکلی از کتب درسی متوسطه حذف نموده اند وحتی درجداول معمول مثلثاتی ولگاریتم‌ها نیز جداول ایندوتابع اکثر دیده نمیشود وحذف گردیده است وفقط در کتب ریاضیات عالیه جدید باغماض وندرت این دو تابع را در عملیات بکار میبرند ـ بعضی ازمؤلفین آلمانی که حتی استعمال ظل تمام «cotg » را نیزموقوف داشته وجائز نمیشمارند .

بعضی از کتب قدیمه ریاضیات فرانسه برای اجتناب از کسوردرعملیات ومحاسبات مثلثاتی این دو تابع « sec و cosec » را بکار میبرند . مثلا بجای اینکه بنویسند $\sin A = \frac{\sin a}{\sin c}$ چنین می‌نویسند : $\sin A = \sin a \operatorname{cosec} c$ ولی این طریقه بهیچوجه امروز پسندیده نیست وبوسیلهٔ این عمل نه تنها یك تابع جدید غیر مانوسی را که اعداد آن در جداول معمولی ثبت نیست درکار آورده‌اند بلکه قاعدهٔ تشابه با این اصل کلی مثلثات مسطحه را که ($\sin A = \frac{a}{c}$) نیزاز کف‌داده و مخالف اسلوب عمل کرده‌اند ـ اینطریقه بهیچوجه در کتب کلاسی امریکائی وانگلیسی و آلمانی معمول نیست ـ ولی درایران چون اکثرمعلمین باهمان اسلوب کتب قدیمهٔ کلاسی فرانسه تدریس مینمایند در تعلیم مثلثات طریقهٔ فوق‌را بکارمیبرند واین طریقه ازنظرتعلیم وتعلم مطابق‌اصول‌امروزی مفیدنیست ـ زیرا یکی ازاصول‌تعلیم امروزه باید برپایه سهولت تدریس وسهولت تفهیم وتفهم قرار گیرد و همیشه درتعلیم یك موضوع باید طرق مختلفه را مقایسه کرده طریق اسهل‌را انتخاب نمود ، یعنی طریقهٔ که شاگرد زودتر بوسیلهٔ آن مطلب را دریابد ونیك هضم کند وبرای او ابهامی واشکالی درمیان نباشد .

هرگاه بناشود که سه تابع « sec و cosec و cotg » نیز تدریس شود کافیست محصل بداند که این توابع مرتبا عکس سه تابع اصلی (جیب و جیب تمام و ظل) میباشند و بدینطریق مثلا برای تعیین و استخراج $\text{cotg}\,(A+B)$ کافی است که ابتدا $\text{tg}\,(A+B)$ را استخراج و بعد آنرا معکوس نمود وهکذا برای تعیین $\sec \frac{A}{2}$ بحسب $\cos A$ باید ابتدا $\cos \frac{A}{2}$ را بحسب $\cos A$ تعیین نمود الی آخر ـ شاگرد را نباید وادار بحفظ فرمولهای مربوط به sec و cosec و cotg نمود و تدریس طرز پیدایش و اثبات فرمولهای مزبور نیز لازم نیست وفرمولهای اصلیه مربوط به توابع اصلیه برای حل مثلثات و اثبات رابطه ها واتحادها وحل معادلات مثلثاتی کفایت میکند .

در میان سایر مباحث این علم قسمت دیگری که باید مختصر شده و زوائد آن حذف گردد موضوع عملیات بازوایای بزرگتر از °۹۰ است ـ امازوایای بزرگتر از °۳۶۰ برای محصلین متوسطه هیچ نتیجه وفائدهٔ عملی وغیرعملی ندارد وبحث در آنها اتلاف وقت است وحل زوایای بین °۱۸۰ و °۳۶۰ نیز بندرت استعمال میشود لهذا وادار کردن شاگردان بحفظ شش فرمول یا بیشتر برای تبدیل توابع زوایای بزرگتر از °۹۰ به توابع زوایای کوچکتر از °۹۰ کاری عبث وبیفائده بنظر میآید.

و همچنین در بیان دلائل اتحادهای مثلثاتی وحل معادلات مثلثاتی اکثر مشاهده شده است که بیش از حد لزوم و بیش از آنچه که حق مقام موضوع است صرف وقت میشود .

مخصوصا بعضی از معلمین تازه کار که تجربهٔ آنها در فن تدریس قلیل و ضعیف است دیده شده است که بدون رعایت مواد پروگرام وبدون ملاحظهٔ قوانین فن تعلیم مباحثی عالی و حتی خارج ازحد فهم محصل بمیان آورده ودر واقع بمحصل جوان فضل فروشی کرده‌اند .

هرگاه معلم ملاحظه نمود وقت تدریس زیاد وبیش ازحد لزوم برای تعلیم موارد عملی و تمرین وحل مسائل عملی وقت دارد بهتر آنست که قدری وقت را صرف تدریس قضیه موبور Moire ورابطهٔ آن با نمایش هندسی اعداد مبهم یا موهومی نماید و تدریس این مبحث بمراتب مقدم بر اثبات اتحاد هائی نظیر این اتحاد میباشد .

$$\frac{\sin(x+2y) - 2\sin(x+y) + \sin x}{\cos(x+2y) - 2\cos(x+y) + \cos x} = \text{tg}\,(x+y)$$

توضیحات در طریقهٔ تدریس مباحث اصلیهٔ مثلثات

تعریف توابع مثلثاتی ـ توابع مثلثاتی (جیب و جیب تمام و ظل و غیره را توابع مثلثاتی اصطلاح می کنیم تا بامفهوم واقعی تعریف ونیز با اصطلاح علمی آن، فونکسیون، وفق دهد) را معمولا بیکی ازسه طریق ذیل تعریف مینمایند :

۱ ـ بصورت خارج قسمت مختصات مثبته یا منفیه نقاط .

۲ ـ بوسیلهٔ مقادیر خطی .

۳ ـ بصورت اضلاع یکمثلث قائم‌الزاویه .

طریقهٔ اول صورت کلی دارد یعنی مربوط بکلیهٔ زوایای واقعه در چهار ربع دائرهٔ مثلثاتی است ولهذا اکثر در فصول اولیهٔ کتب مثلثات از این راه وارد میشوند ولی از طرف دیگر ابتدای بااین طریقه خالی از ضرر نیست زیرا تصور خطوط مثبته و منفیه و مختصات در ابتدای امر ایجاد مشکلاتی مینماید که میباید در مراحل اولیهٔ تدریس مثلثات ازآنها اجتناب نمود لهذا نمیتوان از آغاز

بتدریس اینطریقه را تصویب کرد . توابع مثلثاتی واقعه در ربع اول دائره مثلثاتی مهمترین قسمتی است که تدریس آن در مدارس متوسطه لازم و کافیست .

لهذا میتوان فصول اولیهٔ کتب کلاسی را محدود بشرح زوایای حاده نموده وتجاوز نکرد اما طریقهٔ دوم یعنی طریقهٔ نمایش توابع مثلثاتی بوسیلهٔ خطوط منفرد نیز صورت کلی داشته ومخصوصا در مورد تغییرات توابع بحسب تغییرات زوایا این طریقه مورد استعمالش مفید وقابل قبول است ولی همان ایرادی که در مورد طریقهٔ اول ذکر گردید در اینجا نیز وارد است و طریقهٔ ثانی نیز برای مراحل اولیهٔ تدریس جائز نیست .

درحل مثلثات قائم الزوایا که میتوان این مبحث را بمنزلهٔ قائمه و پایهٔ علم مثلثات عملی شمرد تعریف توابع مثلثاتی بصورت خارج قسمت اضلاع یك مثلث قائم الزاویه کاملا کافیست بعلاوه این طریقه فوق العاده ساده وسهل الهضم است ولهذا میتوان آنرا بهترین طریقهٔ برای تدریس مثلثات بمبتدی دانست.

وبعد از آنکه محصل اینطریقه را در موارد عدیده در حل مسائل استعمال نمود و بکار برد و باتوابع مثلثاتی که دراین مورد بصورت نسبتها نمایش داده میشود کاملا آشنا گردید در آن موقع میتوان تعریفات عمومیه یعنی طریقه‌های اول وثانی را برای ایضاح امر وعمومیت دادن تعریفات تدریس نمود .

توضیح اینکه تدریس دوطریقه تعریف بایکدیگر در ابتدای امر برخلاف قواعد واصول فن تعلیم است.

حل مثلث قائم الزاویه - این قسمت تقریبا مهمترین فصل مثلثات مقدماتیست واگر شاگرد از این مبحث اطلاعات کافی داشته باشد وبر آن تسلط یابد میتواند قسمت اعظم مسائل عملی راکه در مراحل بعد (مثلادر اواخر سال کلاس پنجم یا در کلاس ششم و در مراحل تحصیل ریاضیات عالیه) بدان برمیخورد بسهولت حل نماید وهمچنین در بعضی مدارس فنی و صنعتی خارجه که مثلا در یکسال تحصیلی محصل هشت یاده درس مثلثات بیشتر نمیگیرد چنانچه قسمت اعظم از مدت فوق را صرف مطالعه مثلثات قائم الزوایا وموارد استعمال آن نماید. نتیجهٔ مطلوبه را حاصل میکند وبرای قسمت عملی موضوع تحصیل اطلاعات کافی از این علم مینماید .

درمدارس متوسطه مقتضی است کههمیشه این مبحث را جزء فصول اولیه کتاب قرار دهند.

دیگر اینکه تقسیم طریقهٔ حل مثلثات قائم الزوایا بپنج حالت جزء چنانکه در بعضی کتب معمول است عملی بیهوده و موجب اتلاف وقت محصل است که در مورد حل مسائل باید هر حالتی را با حالات پنجگانه وفق دهد ومطابق دستور حل همان حالت عمل نماید وباید دانست که حل کلیهٔ حالات مبتنی بریك اصل ویك طریقه است وآن نوشتن معادله ایست که شامل دوجزء مفروض ویك جزء مطلوب باشد وفهماندن همین اصل بشاگرد برای حل کلیهٔ مثلثات قائم الزوایا کافی است .

مثلا با استعمال حروف گذاری معموله در مثلث قائم الزاویه اگر $C = 90°$ > وبخواهیم b را بحسب A و c معلوم کنیم کافیست یك معادلهٔ مثلثاتی (از نتیجهٔ تعریف جیب وجیب تمام وظل) بنویسیم که b و c و A را با یکدیگر ربط دهد وآن معادله چنین است :

$$\cos A = \frac{b}{c}$$

لهذا $b = c \cos A$

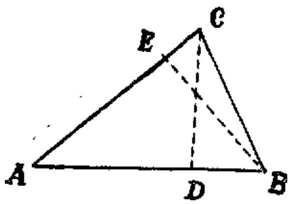
مطلب دیگر اینکه مثلثات قائم الزوایارا ابتدا باید بدون اعانت لگاریتم حل نمود برای اینکه:

اولا ـ در حل مسئلهٔ اولیه یك عمل ثانوی راکه درابتدا خالی از اشکال نیست واردنکنیم

ثانیا ـ خلاف این تصور خطا را که کارهای مثلثاتی بنحو مطلق مربوط با عملیات لگاریتمی است برمحصل معلوم کرده باشیم .

بخصوص امروزه که استعمال ماشینها و آلات محاسبه (مانندانواع خط کشهای محاسبه) تعمیم ورواج کامل یافته است حل مثلثات بدون استعانت از لگاریتم بمراتب مهمتر ازحل بوسیلهٔ لگاریتم است .

بعد از آنکه شاگرد در حل مثلثات قائم الزوایا مهارت بسزا یافت باید موارد استعمال آنرا در حل مسائل عملی و تجربی مانند یافتن ارتفاعات و تعیین مسافات و غیره تدریس نمود ونیز باید موارد استعمال آنرا در حل اشکالی که ممکن است بمثلثات قائم الزوایا تجزیه و تقسیم شوند تعلیم کرد مانند مثلث متساوی الساقین و کثیر الاضلاعهای منظم و انواع مثلثات غیر قائم الزاویه و غیره در حل اشکالی که در اینموقع (یعنی قبل از تدریس حل انواع مثلثات) مبهم بنظر میآیند بایدرفع ابهام را بدینطریق نمود که این نکته را محصل همیشه بذهن بسپارد وبخاطر آورد که دراینگونه مواردباید یك سلسله از مثلثات قائم الزاویه تشکیل گردد که حل هر یك از آنها حل مثلث دیگر را ممکن مینماید تا وقتیکه در آخرین مثلث بمطلوب مسئله میرسیم .



مثلا هرگاه در مثلث غیر قائم الزاویه A B C ضلع A B یا C وزاویه A وزاویه B مفروض است ومطلوب ارتفاع CD میباشد معلوم است که باید اولین مثلث قائم الزاویه ما شامل ضلع C ویکی اززوایای مجاوربآن ضلع یعنی زاویه A باشدلهذا BE را برAC عمود کرده ابتدا مثلث ABE راحل میکنیم ونتیجه شودکه $BE = c \sin A$. اینك بوسیلهٔ ضلع معلوم BE مثلث مجاور بآن یعنی ECB را حل میکنیم زیرا : $C = 180° - (A + B)$ و از حل این مثلث ثانی نتیجه شود که :

$$BC = \frac{BE}{\sin c} = \frac{C \sin A}{\sin (180° - A - B)}$$

بالاخره بوسیلهٔ B C مثلث CDB را حل میکنیم و خط مطلوب مسئله را بدست میآوریم نتیجه شودکه:

$$CD = BC \sin B = \frac{c \sin A \sin B}{\sin (A + B)}$$

و بهمین طریق نیز میتوان بوسیلهٔ مثلثات قائم الزاویه مسائل نظیر مسئلهٔ ذیل را حل نمود که مطلوب تعیین ارتفاع شئی C مثلا قله کوه یعنی مطلوب طول CD باشد که مشرف بر دونقطه A وB واقع بر سطح مستوی مانند جلگه است بطوریکه A وB وC واقع برسطحی قائم بوده و زوایای A وB و فاصلهٔ A B معلوم ودردست باشد .

در حل این نوع مسئله معلوم است که باید اولین مثلث قائم الزاویه شامل ضلع AB وزاویه A باشد لهذا A E را بر B C عمود میکنیم ونتیجه شود که :

$$\angle ECA = \angle A - \angle B \quad \text{وچون} \quad AE = AB \sin B$$

اینك میتوان مثلث AEC را نیز حل نمود و از حل آن نتیجه شود که:

$$AC = \frac{AE}{\sin(A-B)} = \frac{AB \sin B}{\sin(A-B)}$$

و بالاخره ازحل مثلث ACD نتیجه شودکه :

$$CD = AC \sin A = \frac{AB \sin A \sin B}{\sin(A-B)}$$

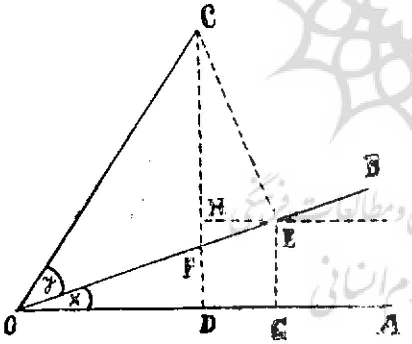
در مسائلی از نوع مسئلهٔ فوق همیشه بهتر آنست که ابتدا جواب مسئله را بشکل عبارت جبری بدست آورده و هرگاه تعیین مقدار عددی آن نیز لازم است در انتهای عمل اعدادمفروضه را دردستورجواب کلی تعویض نمائیم زیرانوشتن اعداد از ابتدا و تکرار آنها مثلا تکرار $20°4'16''$ در عبارات متوالیه نه تنها عملی بیفائده وموجب اشکال است بلکه اکثر محتاج بانجام محاسبات غیر ضروری میگردد. چنانکه در مسئلهٔ فوق یافتن مقادیرعددی AE و AC عملی بیهوده وغیرلازم است.

برای ارائه طریق حل اشکال مبهمه بوسیلهٔ سلسلهٔ مثلثات قائم الزاویهٔ مثال دیگری نیز ذکر میکنیم که مقصود را مجسم نماید و آن حل قضیه یا رابطه مثلثاتی مربوط بمجموع جیوب‌دو زاویه یعنی اثبات رابطهٔ ذیل است :

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

برای یافتن $\sin(x+y)$ بحسب توابع x و توابع y میتوان این مقدار را بوسیلهٔ یك خط نمایش داد باینمعنی‌که OC را مساوی یك واحد اختیار و CD را بر OA عمود کنیم پس CD خط مطلوب مسئله‌است که باید‌آنرا یافت وقسمت معلوم مسئله دراینجا فقط خط OC مساوی باواحداست.

در مورد زوایا همیشه باید این نکته را در مد نظرداشت که ما نه تنها با زوایای مفروضه سروکارداریم بلکه بازوایائی‌سروکارداریم‌که توابع مثلثاتی آنها نیز معین ومفروض‌است.



اینك اولین مثلث ما باید شامل ضلع OC و زاویهٔ مجاور بآن یعنی y باشد پس CE را بر OB عمود میکنیم‌از مثلث قائم‌الزاویه OCE نتیجه شود که :

$$OE = \cos y\ ,\ CE = \sin y$$

و $\angle CFB = \angle OFD = 90° - x$

و $\angle FCE = 90° - \angle CFB = x$

اینك‌برای تشکیل مثلثی قائم الزاویه که شامل CE و زاویه معلومه مجاور بآن یعنی $\angle FCE$ باشد EH را بر CD عمود میکنیم و نتیجه شود که :

$$\frac{CH}{CE} = \cos HCE = \cos x$$

لهذا

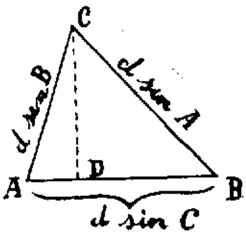
$$CH = CE \cos x = \sin y \cos x$$

اینك برای تعیین قطعهٔ HD خط EG را بر OA عمود میکنیم (زیرا $HD = EG$) ودر مثلث EOG با معلومات OE و x طول EG را تعیین مینمائیم نتیجه شودکه :

$$\frac{EG}{OE} = \sin x$$

$$EG = OE \sin x$$
$$= \cos x \sin y$$

وبدین طریق طول CD که مساوی مجموع $EG+CH$ است معلوم گردیده و رابطه ثابت است.
قضیهٔ فوق را بوسیلهٔ برهان اختصاری ذیل نیز میتوان اثبات نمود که اضلاع مثلثی مانند ABC را بصور ذیل نمایش داده و نام گذاریم.



$$BC = d \sin A$$
$$CA = d \sin B$$
$$AB = d \sin C = d \sin (A+B)$$

پس CD را بر AB عمود نموده گوئیم:

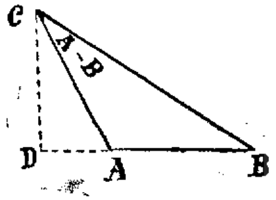
$$AB = BD + DA$$

یا

$$d \sin (A+B) = d \sin A \cos B + d \cos A \sin B$$

لهذا

$$\sin (A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$



وبهمین طریق بوسیلهٔ شکل ثانوی نیز میتوان قضیهٔ $\sin (A-B)$ را ثابت نمود.

تبدیل یك تابع مفروض بصورت سایر توابع مثلثاتی

هرچند این عمل اکثر بوسیلهٔ فرمولهای اصلیهٔ مثلثاتی که مربوط بتوابع مختلفه است انجام میگیرد معهذا طریقهٔ که بیشتر واضح وعملی است طریقهٔ رسم مثلث قائم‌الزاویه است چنانکه از مثال ذیل معلوم میشود.
اگرچه نتایج حاصله از این طریقه فقط مربوط بزوایای کمتر از ۹۰° است معهذا با استعمال قانون علامت درمحل خود نتیجه را در مورد سایر ربع های دائره مثلثاتی نیز بدست میدهد.

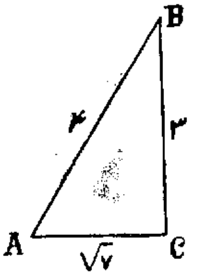
مثال ۱ - مفروض است $\sin A = \frac{۳}{۴}$ مطلوب است کلیهٔ توابع دیگر A

حل — هرگاه مثلث قائم‌الزاویه ABC را بنحو ذیل رسم کنیم یا فرض نمائیم که:

$$AB = ۴ \quad و \quad BC = ۳$$

پس A مساوی زاویهٔ مفروضه است و معلوم است که:

$$AC = \sqrt{۷}$$



اینك کلیه توابع را بسرعت وسهولت میتوان از شکل استنباط نموده نوشت:

مثال ۲ - مفروض است $tg\ A = ۲$ مطلوب سایر توابع A است.

حل - در اینجا BC را مساوی ۲ و AC را مساوی واحد ترسیم میکنیم پس $AB = \sqrt{۵}$ و بلا فاصله تمام توابع دیگر را میتوان از شکل مرسوم خواند.

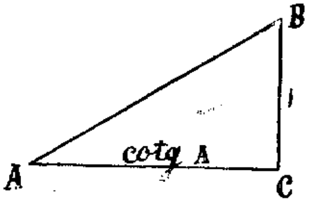
مثال ۳ مفروض‌است $\sec A = \frac{m}{n}$ مطلوب است سایر توابع A

حل - در اینجا $AB = m$ و $AC = n$ ولهذا $BC = \sqrt{m^2 - n^2}$ ... الخ

مثال ۴ - مفروض است $\operatorname{cosec} A = m$ مطلوب است $\cos A$

حل - در اینجا $AB = m$ و $BC = 1$ لهذا

$AC = \sqrt{m^2 - 1}$ وازآنجا $\cos A = \frac{\sqrt{m^2 - 1}}{m}$



مثال ۵ - میخواهیم کلیهٔ توابع مثلثاتی را بصورت $\cot g A$ بیان کنیم .

جواب - فرض کنید $AC = \cot g A$ و $BC = 1$

پس $AB = \sqrt{\cot g^2 A + 1}$ واینك بقیهٔ توابع را میتوان بسهولت بصورت مطلوب نوشت .

طرق اثبات اتحادها - ساده‌ترین طریقهٔ اثبات اتحادهای مثلثاتی که فقط شامل یك زاویه باشند تبدیل شکل آنهاست باتحاد هائیکه شامل سه ضلع یك مثلث قائم‌الزاویه باشد واتحادهای اخیر هم مطابق طریقهٔ معمولی اتحاد های جبری بسهولت ثابت می‌شوند .

هرچند این طریقه اغلب طولانی است ولی برای مبتدی فوق العاده سهل و آسان است مثلا برای اثبات این اتحاد :

$$\frac{\sin A}{1 + \cos A} + \frac{1 + \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A$$

مثلثی قائم‌الزاویه با نام گذاری معمولی رسم و توابعی را که در اتحاد فوق وجوددارد بشکل خارج‌قسمت اضلاع مثلث بیان واتحادفوق را بدین شکل مینویسیم :

$$\frac{\frac{a}{c}}{1 + \frac{b}{c}} + \frac{1 + \frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = 2 \frac{c}{a}$$

اتحاد فوق صحیح است درصورتیکه تساوی ذیل صحیح باشد :

$$\frac{a}{c + b} + \frac{c + b}{a} = \frac{2c}{a}$$

وتساوی فوق صحیح است اگر تساوی ذیل صحیح باشد :

$$a^2 + c^2 + 2cb + b^2 = 2c^2 + 2cb$$

و تساوی فوق صحیح است بشرط آنکه این تساوی صحیح باشد :

$$a^2 + b^2 = c^2$$

وچون تساوی اخیر در مثلث قائم‌الزاویه صادق وصحیح است پس صحت اتحادمفروض ثابت است . کلیهٔ‌فرمولهای اصلی مثلثاتی که‌توابع مثلثاتی را بیکدیگر ربط میدهد با طریقهٔ فوق قابل اثبات است واین‌طریقه را میتوان بوسیلهٔ فرض یکی از اضلاع مثلث مساوی با واحد سهل‌تر ومختصر نمود و معمولا ضلعی را که بیشتر درمخارج کسور واقع میشود باید مساوی واحد فرض نمود مثلادر مثال قبل اگرفرض کنیم $C=۱$ اتحاد بدینصورت بیرون آید :

$$\frac{a}{۱+b}+\frac{۱+b}{a}=\frac{۲}{a}$$

که بسهولت بدین‌شکل درآید :

$$a^{۲}+b^{۲}=۱$$

طریقهٔ دیگری که معمولا محتاج بعمل و استدلال کمتریست ولی بیشتر هوش و دقت لازم دارد تبدیل کلیهٔ توابع است بصورت دو تابع (معمولا جیب وجیب تمام) وهرگاه بازهم حل نگردید کلیهٔ توابع را باید بصورت یك تابع تبدیل نمود.

مثلا درمثال قبل اتحاد مفروض بدین شکل بیرون میآید :

$$\frac{\sin A}{۱+\cos A}+\frac{۱+\cos A}{\sin A}=\frac{۲}{\sin A}$$

یا $\sin^{۲} A+(۱+\cos A)^{۲}=۲(۱+\cos A)$

یا $\sin^{۲} A+\cos^{۲} A=۱$ و اتحاد ثابت است .

هرگاه توابع عموما توابع یك زاویه مانند A نباشد و بعضی از آنها توابع $\frac{A}{۲}$ یا $۲A$ یا $۳A$ وغیره‌باشنددراین هنگام باید کلیهٔ توابع را ابتداتبدیل‌بتابع‌یك زاویه نمودمثلا برای‌اثبات‌این‌اتحاد

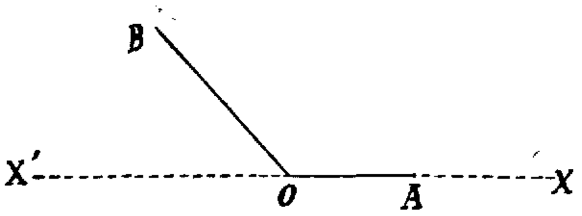
$$۲\sin x+\sin ۲x=\frac{۲\sin^{۳} x}{۱-\cos x}$$

$\sin ۲x$ را باید بصورت توابع x بیان نمود یعنی باید بجای $\sin ۲x$ چنین نوشت : $۲\sin x\cos x$ وبدین نحو مسئله را بیکی ازصور مذکور بیرون می‌آوریم وهکذا برای اثبات این اتحاد : $\operatorname{tg}\frac{x}{۲}+\operatorname{cotg}\frac{x}{۲}=۲\operatorname{cosec} x$ یا باید $\operatorname{cosec} x$ رابصورت تابع $\frac{x}{۲}$ تبدیل نمود و یا باید $\operatorname{tg}\frac{x}{۲}$ و $\operatorname{cotg}\frac{x}{۲}$ را بصورت تابع x بیرون آورد .

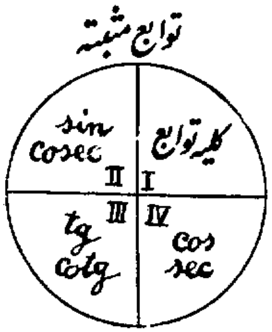
توابع زوایای بزرگتراز °۹۰ — برای تبدیل توابع‌زوایای بزرگتراز °۹۰ بتوابع زوایای کوچکتر از °۹۰ (بجهت مراجعه بجداول) معمولا محصلین را وادار بحفظ عدهٔ کثیری از

فرمول‌ها مینمایند ولی با رعایت دستور ذیل حفظ فرمولها بهیچوجه ضرورت نداشته وعملی بیهوده است.

هر گاه محصلی بخاطر بسپارد که زاویه AOB را معمولا فرض کرده ایم که از گردش شعاع حامل O B بدور نقطهٔ O بر خلاف جهة حرکت عقربه های ساعت تولید شده است و با امتداد O A شعاع اولیه خط XX´ یعنی محور x بدست آمده است بسهولت میتوان بوسیلهٔ قضیهٔ ذیل کلیهٔ توابع را تبدیل بتوابع زوایای حاده نمود.



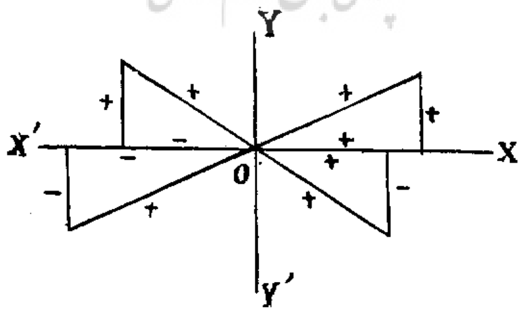
« تابع هر زاویه مساویست با ± همان تابع از زاویهٔ حادهٔ که مابین شعاع حامل ومحور x تشکیل شده است »



اما باید دانست که در قضیهٔ فوق معنی علامت ± این نیست که هردو علامت را میتوان بکار برد و هر دو صحیح است بلکه معنایش اینستکه باید یکی از دو علامت + و — را مطابق دستور ذیل برای تابع انتخاب نمود.

انتخاب علامت باید مطابق نقشهٔ شکل مقابل بعمل آید که توابع مثبته واقع در هریك از ربع ها رابدست داده است و کایهٔ توابع دیگر منفی میباشند وچون هر دو تابع مثبت که در یکی از ربع ها واقع است عکس یکدیگر میباشند لهذا فقط کافیست بذهن بسپاریم که توابع ذیل مثبت میباشند (در ربع دوم جیب - در ربع سوم ظل - درربع چهارم جیب تمام) .

حتی هر گاه شاگرد با فرضیهٔ نمایش توابع بوسیلهٔ خطوط منفرد آشنا باشد حفظ نمودن نکته فوق هم ضرورت ندارد ودر هر مورد آناً میتواند نقشهٔ ذیل را بنظر آورده و در ذهن تجسم داده علامت تابع را کشف کند .



مثلا برای تبدیل cos ۲۴۵° فقط باید فهمید که زاویهٔ ۲۴۵° در ربع سوم واقع است و

معلوم است که جیب تمام آن منفی است وچون زاویه مابین شعاع حامل ومحور X در اینمورد ۶۵° درجه است لهذا : $\cos ۲۴۵° = -\cos ۶۵°$

توابع معکوسهٔ مثلثاتی- مبحث توابع معکوسهٔ مثلثاتی با مقایسه بسایر مباحث برای محصلین متوسطه اهمیتش کمتر است .

برای اینکه معنی وفائده علامات این مبحث مانند $\sin^{-۱} m$ و $\mathrm{tg}^{-۱} n$ بهتر برای شاگرد مفهوم گردد باید بشاگرد اغلب یادآوری نمود که عبارات فوق را همیشه یک زاویه بدانند مثلا چنین بخوانند که:

$\sin^{-۱} \frac{۳}{۴}$ یعنی زاویهٔ که جیب آن $\frac{۳}{۴}$ است .

و $\mathrm{tg}^{-۱} x$ یعنی زاویه ایکه جیب آن x است .

و این تذکر مفید اولا بدون وجوب طریقهٔ مخصوص بحل راقادر به حل مسائل ساده مینماید.

مثلا برای تعیین مقادیر عبارات ذیل محتاج باستعمال طریقهٔ خاص نیست :

$$\sin^{-۱} \frac{۱}{۲} \text{ و } \cos^{-۱} \frac{۱}{۲}\sqrt{۳} \text{ و } \sin(\mathrm{tg}^{-۱} ۱)$$

و $\sec(\mathrm{tg}^{-۱} n)$ وغیره .

(**تنبیه** - علامت $\sin^{-۱} m$ بمفهومیکه فعلا در مثلثات دارد استعمال مناسبی نمیباشد و این علامت بجا وضع نشده است زیرا باید معمولا این علامت این معنی را دهد $(\sin m)^{-۱}$ ولی چون معمول وجاریست از استعمال آن ناگزیریم) .

برای موارد مشکل تر همیشه بهتر آنست که برای زاویه منظور نظر که تابع معکوس آن در دست است علامتی خاص بگذاریم مثلا برای تعیین مقدار $\mathrm{tg}(۲\mathrm{tg}^{-۱} n)$

فرض میکنیم : $\mathrm{tg}^{-۱} n = A$ پس $\mathrm{tg}\ A = n$

لهذا $\mathrm{tg}(۲\mathrm{tg}^{-۱} n) = \mathrm{tg}\ ۲A$

$$= \frac{۲\,\mathrm{tg}\ A}{۱-\mathrm{tg}^۲ A} = \frac{۲n}{۱-n^۲}$$

وطریقهٔ حل امثلهٔ که شامل دو زاویه میباشند از مثال ذیل مفهوم میشود. مطلوب تعیین مقدار این عبارت است :

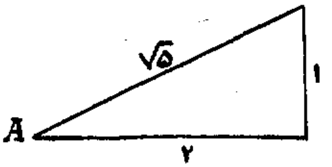
$$\mathrm{tg}\left(\sin^{-۱}\frac{۱}{\sqrt{۵}} + \mathrm{tg}^{-۱}\frac{۱}{۳}\right)$$

فرض میکنیم : $\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} = A$ پس $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$

و فرض میکنیم $\mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{3} = B$ پس $\mathrm{tg}\,B = \frac{1}{3}$

$$\mathrm{tg}\left(\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{1}{3}\right) = \mathrm{tg}\,(A+B)$$

$$= \frac{\mathrm{tg}\,A + \mathrm{tg}\,B}{1 - \mathrm{tg}\,A\;\mathrm{tg}\,B}$$



ولی چون $\sin A = \frac{1}{\sqrt{5}}$ و $\mathrm{tg}\,A = \frac{1}{2}$

پس $\mathrm{tg}(A+B) = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}} = 1$

— هرگاه مقصود اثبات قضیه یا اتحادی از این نوع باشد باید یك یا دوعضو یعنی یك یا هردوطرف رابطه را ساده‌نمود مثلا برای اثبات این اتحاد :

$$\sin(\sin^{-1}X + \sin^{-1}Y) = X\sqrt{1-Y^2} + Y\sqrt{1-X^2}$$

ابتدا ($\sin(\sin^{-1}X + \sin^{-1}Y)$ را مانند طریقهٔ فوق ساده میکنیم تا بصورت طرف دیگر در آید .

— هرگاه هردوطرف اتحاد شامل توابع معکوسه مثلثاتی باشد مقتضی استظل (tg) (یا یکی از توابع دیگر) هر دوطرف را استخراج و تعیین نمائیم مثلا برای اثبات این اتحاد :

$$\mathrm{tg}^{-1}\frac{3}{4} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{3}{5} = \frac{\pi}{4} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{8}{19}$$

ظل طرفین را استخراج یعنی ثابت میکنیم که :

$$\mathrm{tg}\left(\mathrm{tg}^{-1}\frac{3}{4} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{3}{5}\right) = \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} + \mathrm{tg}^{-1}\frac{8}{19}\right)$$

وچون دوطرف تساوی اخیررا ساده کنیم هر یك از طرفین بکسر $\frac{27}{11}$ منتهی می گردد لهذا صحت اتحاد مفروض ثابت است .