تحقیقات مالی
دانشکده مدیریت دانشگاه تهران
دوره ۱۲، شماره ۲۹
بهار و تابستان ۱۳۸۹
صص ۲۱ تا ۴۰

بهینه‌سازی پرتفوی سهام با استفاده از روش حرکت تجمعی ذرات

رضا راعی[۱]، هدایت علی بیکی[۲]

چکیده: مسئله بهینه‌سازی مارکویتز و تعیین مرز کارای سرمایه‌گذاری، زمانی‌که تعداد دارایی‌های قابل سرمایه‌گذاری و محدودیت‌های موجود در بازار کم باشد، توسط مدل‌های ریاضی حل‌شدنی است. اما هنگامی‌که شرایط و محدودیت‌های دنیای واقعی در نظر گرفته شود، مسئله بهینه‌سازی پرتفوی به‌راحتی با استفاده از شیوه‌های ریاضی حل نمی‌شود. به‌همین دلیل استفاده از شیوه‌های ابتکاری همچون شبکه‌های عصبی و الگوریتم‌های تکاملی در بهینه‌سازی پرتفوی یکی از موضوعات مهم مورد بحث در دوران اخیر بوده است. هدف اصلی پژوهش حاضر حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی (مدل میانگین ـ واریانس) با استفاده از روش بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات (PSO) است. بدین منظور با استفاده از اطلاعات قیمت ۲۰ سهم پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران در فاصله زمانی مهر ۱۳۸۵ تا شهریور ۱۳۸۷، مرز کارای سرمایه‌گذاری رسم می‌شود. نتایج این پژوهش نشان می‌دهد، روش بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات در بهینه‌سازی پرتفوی سهام با وجود محدودیت‌های بازار موفق است.

واژه‌های کلیدی: بهینه‌سازی پورتفوی، تکنیک بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات، مدل میانگین ـ واریانس، مرز کارا.

---

۱. دانشیار دانشکده مدیریت دانشگاه تهران، ایران
۲. دانشجوی کارشناسی ارشد مدیریت مالی دانشکده مدیریت دانشگاه تهران

تاریخ دریافت مقاله: ۱۲ / ۷ / ۸۸
تاریخ پذیرش نهایی مقاله: ۲۰ / ۱۰ / ۸۸
نویسنده مسئول مقاله: هدایت علی بیکی
Email: h.alibeiki@gmail.com

۱- مقدمه

در بهینه‌سازی پرتفوی، مسئله اصلی انتخاب بهینه دارایی‌ها و اوراق بهاداری است که با مقدار مشخصی سرمایه می‌توان تهیه کرد [۶]. اگرچه کمینه کردن ریسک و بیشنه نمودن بازده سرمایه‌گذاری به‌نظر ساده می‌رسد، اما در عمل روش‌های متعددی برای تشکیل پرتفوی بهینه به‌کار رفته است. مارکویتز نظریه مدرن پرتفوی را به‌صورت فرمول ریاضی بیان کرد [۸]. در مدل میانگین ـ واریانس طراحی شده توسط وی میانگین، بازده مورد انتظار را نشان می‌دهد و واریانس بیانگر ریسک پرتفوی است. بعد از مدل مارکویتز افراد زیادی سعی در توسعه و اصلاح مدل وی داشته اند. به‌عنوان مثال کونو و یامازاکی [۷] مدل میانگین ـ انحراف مطلق (MAD) را توسعه دادند که در مدل آن‌ها انحراف مطلق به‌نوعی بیانگر ریسک است. این مدل‌ها در کلیه‌ی شرایط پاسخ‌گوی نیازهای سرمایه‌گذاران نیستند. مانسینی و اسپرنزا [۱۱] در این رابطه خاطر نشان می‌سازند، اکثر مدل‌های انتخاب پرتفوی تقسیم‌پذیری سرمایه‌گذاری را بی‌نهایت فرض می‌کنند؛ در حالی‌که در دنیای واقعی اوراق بهادار به تعداد مشخص (ضرایبی از یک ضریب معاملاتی حداقلی) معامله می‌شوند. بنابراین آن‌ها پیشنهاد می‌کنند، از یک مدل برنامه‌ریزی عدد صحیح مختلط با ملاحظه محدودیت‌های مربوط به حداقل معاملات استفاده شود.

بعضی از پژوهشگران به مسئله بهینه‌سازی چند ـ دوره‌ای سبد سهام پرداخته‌اند. در حالت چند- دوره‌ای فرض می‌شود، سرمایه‌گذاران به جای آن‌که در یک دوره سرمایه‌گذاری کنند، به‌صورت پیوسته فعالیت می‌کنند. در این زمینه به‌عنوان مثال سلیکورت و اوزکیسی [۱۳] عوامل مختلفی مانند عوامل اقتصادی، اجتماعی، سیاسی را در بهینه‌سازی سبد سهام در نظر گرفته‌اند. آن‌ها بازار تصادفی مورد مطالعه را با توجه به این عوامل و با استفاده از رویکرد زنجیره مارکوف مدل‌سازی کرده‌اند.

تعداد پژوهش‌ها و مطالعاتی که در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی با استفاده از تکنیک بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات انجام شده است، به نسبت سایر روش‌های ترکیبی بسیار کمتر است. یین و وانگ [۱۵] روش PSO را در مسئله غیرخطی تخصیص منابع به‌کار گرفته‌اند و کارایی این روش را با الگوریتم ژنتیک مقایسه کرده و نتیجه گرفته‌اند، تکنیک PSO از الگوریتم ژنتیک کاراتر است.

یان و میانو و لی [۱۴] در پژوهشی، با استفاده از ترکیبی از روش‌های PSO و GA به انتخاب چند دوره‌ای پرتفوی با استفاده از عامل ریسک نیم‌واریانس پرداخته‌اند. آن‌ها نشان

می‌دهند، استفاده ترکیبی از PSO و GA از کاربرد هریک از آن‌ها به‌تنهایی به‌مراتب کاراتر است.

کورا [۵] از روش PSO در مسئله بهینه‌سازی پرتفوی مقید استفاده می‌کند. او در این پژوهش قیمت‌های هفتگی تعداد محدودی از سهام در بازارهای مختلف دنیا را در بازه ۵ ساله از ۱۹۹۲ تا ۱۹۹۷ انتخاب کرده و با این تکنیک مرز کارا را رسم می‌کند و در پایان نتیجه می‌گیرد که این تکنیک در بهینه‌سازی پرتفوی بسیار موفق عمل می‌کند.

اس. سی. چیام [۴] با ترکیب الگوریتم ژنتیک و تکنیک بهینه‌سازی جمعی ذرات[1]، در قالب الگوریتم ممتیک که در آن تکنیک PSO فقط بر روی جواب‌های به‌دست آمده توسط الگوریتم ژنتیک اعمال می‌شد، نشان داد که با استفاده از این الگوریتم پرتفویی به مراتب کاراتر از زمانی که این الگوریتم‌ها به‌صورت جداگانه اعمال شوند، به‌دست خواهد آمد.

در ایران در زمینه انتخاب پرتفوی بهینه با استفاده از الگوریتم‌های تکاملی، عبدالعلی‌زاده شهیر و عشقی پژوهشی را در زمینه بهینه‌سازی پرتفوی توسط الگوریتم ژنتیک انجام دادند [۳]. تقوی‌فرد، منصوری و خوش‌سیرت با افزودن محدودیت‌های دیگری به مدل قبلی نشان دادند، با استفاده از الگوریتم ژنتیک می‌توان مرز کارایی را به‌دست آورد که تا حدود زیادی تخمین زننده مرز کارای به‌دست آمده توسط روش‌های کوادراتیک[2] برنامه‌ریزی ریاضی است. محدودیت‌هایی که آن‌ها به مسئله اضافه کردند، محدودیت‌هایی مانند محدودیت عدد صحیح بودن تعداد سهام موجود در پرتفوی و همچنین محدودیت حد بالای اوزان دارایی‌ها بود [۱].

باید توجه داشت که مدل استاندارد مارکویتز محدودیت مربوط به تعداد دارایی‌های منتخب و همچنین محدودیت‌های مربوط به حد پایین و بالای نسبت سرمایه‌گذاری در هر دارایی در سبد را در بر ندارد. چانگ و دیگران [۱۲] و فرنانذز و گومز [۶] مدل اصلاح یافته مارکویتز را تحت عنوان "مدل میانگین ـ واریانس با مؤلفه‌های محدود" (CCMV) به‌کار گرفتند. بخش عمده مطالعات موردی انجام شده در این پژوهش نیز به حل مدل CCMV بر اساس تکنیک PSO اختصاص می‌یابد.

1. Particle Swarm Optimization
2. Quadratic

۲- مسئله بهینه‌سازی پرتفوی

دو مؤلفه مهم در تصمیم‌گیری برای سرمایه‌گذاری، میزان ریسک و بازده دارایی‌های سرمایه‌ای است. اغلب سرمایه‌گذاران به‌دنبال حداکثر نمودن بازدهی خود در سطح معینی از ریسک و یا کمینه نمودن ریسک در سطح معینی از بازده هستند. مارکویتز با ارایه مدل میانگین ـ واریانس خود نشان داد، با تشکیل سبدی از دارایی‌های مالی این امکان به‌وجود می‌آید که در سطح معینی از بازده ریسک را کاهش داد. این امکان به‌دلیل نبود همبستگی کامل بین بازده دارایی‌های مالی مختلف به‌وجود می‌آید. افراد مختلف بر اساس میزان مطلوبیت مورد انتظارشان دست به سرمایه‌گذاری می‌زنند و از مصرف امروز به امید مصرف بیشتر در آینده چشم‌پوشی می‌کنند. تابع مطلوبیت هر سرمایه‌گذار با توجه به ترجیحات همان شخص تعیین می‌شود که لزوماً با سایر سرمایه‌گذاران یکسان نخواهد بود. ریسک و بازده معیارهایی هستند که میزان مطلوبیت سرمایه‌گذار را از انتخاب مجموعه دارایی مشخص می‌کنند. انتخاب مجموعه دارایی بهینه اغلب با تبادل بین ریسک و بازده صورت می‌گیرد و هرچه ریسک مجموعه دارایی بیشتر باشد، سرمایه‌گذاران انتظار دریافت بازده بالاتری را خواهند داشت. شناسایی مرز کارای مربوط به سبد دارایی‌ها این امکان را به سرمایه‌گذاران می‌دهد که بر اساس تابع مطلوبیت و درجه ریسک گریزی و ریسک پذیری خود، بیشترین بازده مورد انتظار را از سرمایه‌گذاری خود به‌دست آورند. هر یک از سرمایه‌گذاران بر مبنای درجه ریسک پذیری و ریسک گریزی خود، نقطه‌ای را بر روی مرز کارا انتخاب کرده و ترکیب پرتفوی خود را با هدف حداکثر کردن بازده و کمینه کردن ریسک تعیین می‌کنند. [۲]

بهینه‌سازی پرتفوی عبارت است از انتخاب بهترین ترکیب از دارایی‌های مالی به‌نحوی که باعث شود، تا حد ممکن بازده پرتفوی سرمایه‌گذاری حداکثر و ریسک پرتفوی حداقل شود. ایده اساسی نظریه مدرن پرتفوی[۱] این است که اگر در دارایی‌هایی که به‌طور کامل با هم همبستگی ندارند سرمایه‌گذاری شود، ریسک آن دارایی‌ها یکدیگر را خنثی کرده؛ بنابراین، می‌توان یک بازده ثابت را با ریسک کمتر به‌دست آورد. [۸]

برای اولین بار، در سال ۱۹۵۲ مارکویتز[۸] الگوی حل مسئله انتخاب مجموعه بهینه دارایی‌ها (نظریه میانگین ـ واریانس) را ارایه داد. وی، مسئله را به‌صورت برنامه‌ریزی

1. Modern Portfolio Theory (MPT)

کوادراتیک با هدف کمینه‌سازی واریانس مجموعه دارایی‌ها با این شرط که بازده مورد انتظار با یک مقدار ثابت برابر باشد، مطرح کرد. ریسک‌گریز بودن کلیه‌ی سرمایه‌گذاران، فرض اصلی این مدل است. این مسئله یک محدودیت کارکردی دیگر نیز دارد که براساس آن مجموع اوزان دارایی‌ها باید برابر با یک شود. همچنین وزن هر یک از دارایی‌ها در پرتفوی باید عددی حقیقی و غیر منفی باشد. شکل استاندارد مدل میانگین ـ واریانس به‌صورت زیر است:

$$Min \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\text{Subject to } \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = R^*, \qquad (1)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

در مدل مارکویتز نکات زیر قابل‌توجه است:

- با افزایش تعداد دارایی‌ها، حجم محاسبات ماتریس کوواریانس بیش از اندازه بزرگ می‌شود.
- هیچ‌گونه حد پایین یا بالایی برای سهم هر دارایی در مجموعه دارایی وجود ندارد. در صورتی‌که در عمل ممکن است دلایل زیادی برای محدود کردن میزان یک دارایی در مجموعه دارایی وجود داشته باشد.
- معیار عمومی ریسک، واریانس و یا ریشه دوم آن یعنی انحراف معیار است. این معیار، برای یک دارایی که دارای توزیع نرمال باشد و در بازاری کارا معامله شود، معیار قابل‌قبولی است. اگر این دو خصوصیت برای دارایی وجود نداشته باشد، واریانس نشانگر مناسبی برای ریسک سهام نخواهد بود؛ به‌همین دلیل معیارهای دیگری برای ریسک مثل نیم‌واریانس[1] مطرح می‌شوند.

1. Semi-variance

فرناندز و گومز [۶] مدل مارکویتز را با افزودن محدودیت‌های حد بالا و پایین برای متغیرها، اصلاح کردند و مدل CCMV یا «میانگین ـ واریانس با مؤلفه‌های مقید[1]» را به‌وجود آوردند؛ که شکل عمومی این مدل به‌صورت زیر است:

$$Min\ \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j \sigma_{ij}$$

$$\text{Subject to}\ \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i = R^*, \qquad (۲)$$
$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1,$$
$$\varepsilon_i \le x_i \le \delta_i$$
$$x_i \ge 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

که ε_i و δ_i به‌ترتیب حد پایین و بالای متغیر i- ام (نسبت سهم i در سبد سرمایه‌گذاری) می‌باشند.

در صورتی‌که محدودیت مربوط به تعداد دارایی‌های منتخب به مسئله فوق اضافه شود، مدل مربوطه به‌شکل زیر در می‌آید.

$$Minimize\ \lambda \left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_i x_i z_j x_j \sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} z_i x_i \mu_i\right] \qquad (۳)$$

$$\text{Subject to}\ \sum_{i=1}^{N} x_i = 1 \qquad (۴)$$
$$\sum_{i=1}^{N} z_i = K \qquad (۵)$$
$$\varepsilon_i z_i \le x_i \le \delta_i z_i \quad (i = 1, \dots, n) \qquad (۶)$$
$$z_i \in [0,1] \quad (i = 1, \dots, n) \qquad (۷)$$
$$x_i \ge 0 \quad (i = 1, \dots, n) \qquad (۸)$$

در مدل ریاضی فوق که مدل اصلی مورد بررسی در این مقاله نیز هست، λ پارامتری است که مقدار آن در فاصله [۱و۰] تغییر می‌کند؛ به طوری‌که با قرار دادن ۰=λ کل مقدار ضریب وزنی به بازده تخصیص داده می‌شود و بدون توجه به ریسک، سبد سهام دارای بیشترین بازده انتخاب می‌شود و با در نظر گرفتن ۱=λ کل مقدار ضریب وزنی به ریسک داده شده و بدون توجه به بازده، سبد سهام دارای کمترین ریسک انتخاب می‌شود. در

1. Cardinality Constrained Mean-Variance

فاصله بین صفر و یک، سبدهایی با در نظر گرفتن هر دو عامل ریسک و بازده بهینه می‌شوند. به‌عبارت دیگر با افزوده شدن مقدار ضریب λ، هدف کاهش ریسک اهمیت بیشتری یافته و در عین حال چون مقدار $(1-\lambda)$ کاهش می‌یابد، بیشینه کردن بازده اهمیت کمتری می‌یابد.

z_i متغیر تصمیم در مورد سرمایه‌گذاری در هر سهم است. اگر z_i برابر ۱ باشد؛ یعنی سهم i در سبد قرار خواهد گرفت. مجموع تعداد سهامی که در سبد خواهند بود، بنا به محدودیت سوم مسئله k تا خواهد بود و ε_i و δ_i به ترتیب حد پایین و بالای متغیر i-ام (نسبت سهم i در سبد سرمایه‌گذاری) هستند.

پس از حل مسئله بهینه‌سازی پرتفوی، با درنظرگرفتن بازده‌های متفاوت و تعیین اوزان بهینه، نموداری شبیه شکل زیر به‌وجود می‌آید.

نمودار ۱. مرز کارای سرمایه‌گذاری

مجموعه معادلات مدل CCMV ترکیبی از مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم است؛ که برای حل دقیق این نوع مسائل الگوریتم‌های مؤثر و کارایی در برنامه‌ریزی ریاضی وجود ندارد. در این پژوهش با هدف تشکیل پرتفوی بهینه و شناسایی مرز کارای سرمایه‌گذاری، به بررسی امکان شناسایی و تشکیل پرتفوی بهینه توسط تکنیک فرا ابتکاری «بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات یا PSO» پرداخته می‌شود.

۳- روش بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات[1]

در چند سال اخیر با توجه به محدودیت‌های موجود در روش‌های ریاضی، پژوهش‌های زیادی در زمینه استفاده از الگوریتم‌های تکاملی، در جهت بهینه‌سازی پرتفوی انجام شده است. یکی از کاراترین تکنیک‌های مورد استفاده در این زمینه، تکنیک بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات است. روش PSO یا «بهینه‌سازی حرکت تجمعی ذرات» که توسط کندی و ابرهارت [۹] ایجاد شده است، یکی از جدیدترین روش‌های تکاملی بهینه‌سازی است. این تکنیک با الهام از روابط و کنش‌های اجتماعی موجود در طبیعت مانند حرکت توده پرندگان یا ماهیان دریا شکل گرفته است.

جمعیت (حرکت تجمعی)[2] در PSO، شامل مجموعه‌ای از اعضاست که به هر عضو داخل جمعیت یک «ذره»[3] گفته می‌شود. در این تکنیک از مفهوم «جانمایی همسایگی جی‌بست»[4] که توسط کندی و دیگران [۱۰] معرفی شده، استفاده می‌شود؛ یعنی هر ذره بهترین موقعیت قبلی خود و بهترین موقعیت قبلی هریک از ذرات موجود در جمعیت را به‌خاطر می‌آورد و به‌عبارت دیگر هر ذره در جهت بهترین موقعیت قبلی خود و به‌سمت بهترین ذره حرکت می‌کند.

در این مطالعه هر ذره نمایانگر یک سبد سهام است و ذرات با بهترین موقعیت، مرز کارای سرمایه‌گذاری را شکل می‌دهند. برای هر ذره $2\times N$ بعد در نظر گرفته می‌شود که N تعداد کل دارایی‌هاست. N بعد اول مربوط به متغیرهای نسبت سرمایه‌گذاری در هر سهم (x_{pi}) است و N بعد دوم متغیرهای تصمیم سرمایه‌گذاری (z_{pi}) را در بر می‌گیرد. $p=1,...,P$ شماره ذره را در پرتفوی نشان می‌دهد؛ p تعداد کل ذرات موجود در ازدحام است. $i=1,...,N$ شماره سهم را در ذره نشان می‌دهد.

در این مقاله از تکنیک PSO برای حل سه مدل بهینه‌سازی پرتفوی با محدودیت‌های مختلف (به ترتیب از ساده به پیچیده) استفاده می‌شود. در ادامه فرضیه‌ها و پارامترهای مورد استفاده در الگوریتم PSO برای حل کامل‌ترین مدل مورد بررسی (معادلات ۳ تا ۸) ارایه می‌شود.

1. Particle Swarm Optimization
2. Swarm
3. Particle
4. gbest Neighborhood Topology

۳-۱- تابع برازش

کندی و ابرهارت برای ذرات موجود در جمعیت تابع هدفی (تابع برازش) پیشنهاد می‌کنند که هر ذره سعی در بهینه کردن آن دارد. بنابراین هر ذره در فضای جواب با توجه به موقعیت قبلی خود و موقعیت قبلی همسایگان حرکت می‌کند [۹]. بهترین موقعیت قبلی هر ذره نقطه‌ای است که آن ذره در مسیر حرکت خود بهترین مقدار برازش را کسب کرده است و بهترین موقعیت همسایگی قبلی، وضعیتی را بیان می‌کند که سایر ذرات موجود در یک جمعیت بهترین مقدار برازش را کسب کنند. در این مطالعه و در کامل‌ترین مدل مورد بررسی تابع برازش به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$f_p = \lambda\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_{pi}x_{pi}z_{pj}x_{pj}\sigma_{ij}\right] - (1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} z_{pi}x_{pi}\mu_i\right] \qquad (۹)$$

که f_p مقدار برازش ذره p است.

در هر تکرار بهترین موقعیت مربوط به هر ذره و بهترین موقعیت همسایگی در جمعیت در صورتی که تغییری در مقادیر برازش مشاهده شود، به‌هنگام می‌شود.

۳-۲- حرکت ذرات

همان‌طور که در قبل نیز بیان شد، هر ذره در هر تکرار به‌سمت بهترین موقعیت قبلی خود و به‌سمت بهترین ذره در جمعیت حرکت می‌کند. میزان این جابه‌جایی در هر تکرار به سرعت ذرات بستگی دارد. سرعت ذرات در تکنیک PSO به‌شکل زیر تعریف می‌شود:

$$vz_{pi}^{t+1} = vz_{pi}^{t} + \omega_1 \times (Gz_{bi} - z_{pi}^{t}) + \omega_2 \times (Gz_{pi} - z_{pi}^{t}) \qquad (۱۰)$$

$$vx_{pi}^{t+1} = \begin{cases} vx_{pi}^{t} + \omega_1 \times (Gx_{bi} - x_{pi}^{t}) + \omega_2 \times (Gx_{pi} - x_{pi}^{t}) & \text{اگر } z_{pi}^{t+1} = 1 \\ vx_{pi}^{t} & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \qquad (۱۱)$$

که ω_1 و ω_2 اعداد تصادفی با توزیع یکنواخت بین ۰ و ۲ هستند. t و b به‌ترتیب شماره تکرار الگوریتم و بهترین ذره در جمعیت را نشان می‌دهند. vx_{pi}^{t} سرعت ذره p در جهت x_i و vz_{pi}^{t} سرعت آن ذره در جهت z_i است. مقدار vx_{pi}^{t+1} در صورتی تغییر می‌کند که سهام i در تکرار $t+1$ انتخاب شود؛ و این بدان معناست که $z_{pi}^{t+1} = 1$. مقدار

z_{pi}^{t+1} بر اساس معادله ۶ تعیین می‌شود. Gx_{pi} و Gz_{pi} به‌ترتیب بهترین موقعیت قبلی ذره p در جهت x_i و در جهت z_i را نمایش می‌دهند و Gx_{bi} و Gz_{bi} به‌ترتیب موقعیت بهترین ذره در جمعیت در جهت x_i و در جهت z_i را نشان می‌دهند. حرکت ذره p در تکرار $t+1$ به‌صورت زیر خواهد بود:

$$z_{pi}^{t+1} = round\left(\frac{1}{1+e^{-\varsigma}} - \alpha\right) \tag{۱۲}$$

$$x_{pi}^{t+1} = \begin{cases} x_{pi}^{t} + vx_{pi}^{t+1} & \text{اگر } z_{pi}^{t+1} = 1 \\ x_{pi}^{t} & \text{در غیر این صورت} \end{cases} \tag{۱۳}$$

که در آن $\varsigma = z_{pi}^{t} + vz_{pi}^{t+1}$ است. در صورتی‌که $vz_{pi}^{t+1} = 0$ و $z_{pi}^{t} = 0$ مقدار $1/\left(1+e^{0}\right)$ برابر با ۰.۵ و $round(0.5) = 1$ می‌شود، به‌عبارت دیگر ذره p در تکرار $t+1$ در جهت z_i حرکت می‌کند. برای پرهیز از این حرکت ناخواسته متغیر α با مقدار ثابت برابر با ۰.۰۱ در نظر گرفته شده است.

۳-۳- محدودیت‌های مدل

همان‌طور که در قبل گفته شد، هر ذره در پایان هر تکرار در فضای جواب $2 \times N$ بعدی موقعیت جدیدی اتخاذ می‌کند. هر ذره نماینده یک جواب برای مدل مورد نظر است و باید موجه باشد؛ بنابراین باید معادلات مربوط به محدودیت‌ها را برآورده سازد. اغلب در مواردی که از روش‌های فراابتکاری برای حل مسایل بهینه‌سازی استفاده می‌شود، محدودیت‌ها را به‌صورت ضرایب جریمه در تابع برازش در نظر می‌گیرند. در این مقاله با رویکردی مشابه رویکرد چانگ و دیگران [۱۲] و رویکرد کورا [۵] خرده الگوریتم‌هایی برای برآوردن محدودیت‌های مسئله در نظر گرفته شده است.

به‌منظور اعمال محدودیت مربوط به تعداد سهام منتخب، متغیر $K_p^* = \sum_{i=1}^{N} z_{pi}$ و مجموعه Q تعریف می‌شود. Q مجموعه سهامی است که ذره (پرتفوی) p در بر دارد و K_p^* تعداد سهام موجود در مجموعه Q را نشان می‌دهد. اگر فرض شود، K تعداد دارایی مطلوب در سبد سهام باشد، در حالتی‌که $K_p^* < K$ باشد، به Q تعدادی سهام باید اضافه شود. اگر $K_p^* > K$ باشد، از Q تعدادی سهم باید کم شود تا زمانی که $K_p^* = K$ شود. برای تصمیم‌گیری در مورد این‌که کدام سهم باید به مجموعه Q اضافه یا کم شود، میزان تأثیر نسبی هریک از سهام بر تابع برازش (c_i) اندازه‌گیری می‌شود. سهام یا دارایی‌هایی که

اثر نسبی آن‌ها بر تابع برازش زیاد باشد، برای اضافه شدن به مجموعه Q در اولویت هستند و برعکس، سهم‌هایی که اثر آن‌ها بر تابع برازش کم باشد، برای حذف شدن از مجموعه Q در اولویت هستند. محاسبه c_i مطابق فرمول‌های زیر انجام می‌شود.

$$\theta_i = 1 + (1-\lambda)\mu_i \qquad i = 1,\dots,N \tag{۱۴}$$

$$\rho_i = 1 + \lambda \frac{\sum_{j=1}^{N} \sigma_{ij}}{N} \qquad i = 1,\dots,N \tag{۱۵}$$

$$\Omega = -1 \times \min(0, \theta_1, \dots, \theta_N) \tag{۱۶}$$

$$\psi = -1 \times \min(0, \rho_1, \dots, \rho_N) \tag{۱۷}$$

$$c_i = \frac{\theta_i + \Omega}{\rho_i + \psi} \qquad i = 1,\dots,N \tag{۱۸}$$

معادلات ۱۶ و ۱۷ به‌منظور جلوگیری از وقوع حالت‌های خاص از جمله حالات زیر استفاده شده است.

$$\lambda \frac{\sum_{j=1}^{N} \sigma_v}{N} < -1 \quad \text{و یا} \quad (1-\lambda)\mu_i < -1$$

بنابراین در حالتی‌که $K_p^* > K$، سهم با کمترین مقدار c از مجموعه Q حذف می‌شود و در حالتی‌که $K_p^* < K$، سهم با بیشترین مقدار c به مجموعه Q اضافه می‌شود.

همان‌طور که گفته شد، ابعاد x_i موجود در هر ذره (پرتفوی) نسبت سرمایه‌گذاری را نمایش می‌دهد. مجموع ابعاد x_i برای سهم‌هایی که در مجموعه Q هستند، باید برابر با یک باشد. اگر χ مجموع x_i ها باشد، با تبدیل $x_{pi} = x_{pi} / \chi$ برای تمامی سهم‌های عضو Q ، محدودیت مربوط به معادله ۹ برآورده می‌شود.

بر اساس معادله ۶ محدودیت $\varepsilon_i \le x_{pi} \le \delta_i$ نیز برای سهم‌های عضو Q باید برقرار شود. برای اعمال این محدودیت متغیرهای $e_i = x_{pi} - \varepsilon_i$ و $t_i = \delta_i - x_{pi}$ برای سهام عضو مجموعه Q تعریف می‌شوند. δ^* مجموع t_i ها و ε^* مجموع e_i هاست. η مجموع ($-1 \times t_i$) هایی است که $t_i < 0$ باشد. ϕ مجموع ($-1 \times e_i$) هایی است که $e_i < 0$

باشد. در صورتی‌که ابعاد یک ذره از حد بالای سرمایه‌گذاری تجاوز کند، یا از حد پایین کمتر شود بر اساس معادله زیر محدودیت مربوط برآورده می‌شود.

$$x_{pi} = \begin{cases} x_{pi} + \frac{t_i}{d^*} h & \text{اگر } t_i > 0 \\ d_i & \text{اگر } t_i < 0 \\ x_{pi} + \frac{e_i}{e^*} f & \text{اگر } e_i > 0 \\ e_i & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases} \quad \text{برای تمام اعضای مجموعه } Q \qquad (۱۹)$$

۴- مطالعات موردی

همانطور که در قبل نیز گفته شد، در این مقاله مسئله بهینه‌سازی پرتفوی سهام در ۳ مدل مختلف (به ترتیب از ساده به پیچیده) با استفاده از تکنیک PSO حل می‌شود. جامعه‌ی آماری پژوهش شامل کلیه‌ی شرکت‌های فعال در بورس اوراق بهادار تهران در فاصله زمانی مهر ۱۳۸۵ تا اسفند ۱۳۸۷ است. برای حل مدل از اطلاعات قیمت سهام ۲۰ شرکت پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران استفاده می‌شود.

اطلاعات مربوط به میانگین و انحراف معیار بازده سهام مختلف در نگاره ۱ ارایه شده است. همان‌طور که در نگاره فوق مشخص است، میانگین بازده قیمتی اکثر سهام انتخاب شده در بازه مورد بررسی منفی بوده است.

نگاره ۱. اطلاعات قیمت ۲۰ سهم پذیرفته شده در بورس اوراق بهادار تهران

شماره سهم	میانگین قیمت	میانگین بازده	انحراف معیار بازده	تعداد روزهای معامله شده
۱	۵۰۵۳.۹	−۰.۰۰۱۹	۰.۰۳۱۶	۵۴۰
۲	۱۳۵۶.۰	−۰.۰۰۲۴	۰.۰۱۹۱	۵۰۶
۳	۳۵۰۹.۲	−۰.۰۰۰۷	۰.۰۲۱۹	۵۲۰
۴	۱۳۳۲.۶	۰.۰۰۰۴	۰.۰۱۸۵	۵۳۳
۵	۹۶۴۲.۰	−۰.۰۰۰۹	۰.۰۴۷۸	۵۱۲
۶	۱۹۳۸.۲	۰.۰۰۰۱	۰.۰۱۷۳	۵۲۷
۷	۸۷۰۷.۱	۰.۰۰۰۱	۰.۰۴۳۴	۵۰۹
۸	۱۸۷۵.۶	−۰.۰۰۰۷	۰.۰۲۵۶	۴۹۳
۹	۳۳۷۴.۹	۰.۰۰۰۴	۰.۰۲۹۲	۴۶۴
۱۰	۱۷۱۸.۳	۰.۰۰۰۲	۰.۰۱۶۷	۵۲۵
۱۱	۱۵۵۶.۶	−۰.۰۰۱۰	۰.۰۲۹۵	۵۴۰
۱۲	۶۴۵۵.۰	−۰.۰۰۳۱	۰.۰۳۵۵	۴۸۰
۱۳	۴۲۱۵.۱	۰.۰۰۰۰	۰.۰۲۰۱	۵۲۰
۱۴	۷۱۵۶.۸	−۰.۰۰۳۰	۰.۰۴۰۹	۴۹۷
۱۵	۲۲۶۹.۴	−۰.۰۰۱۷	۰.۰۷۲۴	۴۹۷
۱۶	۱۲۲۵.۱	−۰.۰۰۰۷	۰.۰۲۲۴	۴۸۱
۱۷	۱۰۲۰.۵	۰.۰۰۰۰	۰.۰۰۳۳	۴۹۱
۱۸	۹۴۲.۳	−۰.۰۰۲۲	۰.۰۱۳۲	۴۸۵
۱۹	۱۳۹۰.۷	−۰.۰۰۱۳	۰.۰۲۱۹	۴۶۶
۲۰	۲۱۹۴.۷	−۰.۰۰۱۶	۰.۰۲۲۱	۵۴۲
تعداد کل روزهای مورد بررسی				**۷۴۴**

فرمول‌های ریاضی مربوط به به مدل‌های برنامه‌ریزی درجه ۲ مسئله بهینه‌سازی پرتفوی سهام در نگاره شماره ۲ ارایه شده است. فرمول ۱ ساده‌ترین مدل را نشان می‌دهد. در این مدل فقط محدودیت برابر یک بودن مجموع اوزان سرمایه‌گذاری، لحاظ شده است. در فرمول ۲ که حالت بینابین دو فرمول ۱ و ۳ است، محدودیت‌های حد بالا و پایین برای سرمایه‌گذاری در دارایی‌ها اضافه شده است. و درنهایت در فرمول ۳ که پیچیده‌ترین حالت مورد بررسی در این مقاله را نمایش می‌دهد، محدودیت تعداد دارایی‌های پرتفوی نیز اضافه می‌شود.

نگاره۲. مدل‌های مربوط به مسئله بهینه‌سازی پرتفوی سهام – از ساده به پیچیده

مدل شماره ۱	$Minimize\ \lambda\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}\right]-(1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i\right]$ Subject to $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ $x_i \geq 0 \quad (i=1,\dots,n)$
مدل شماره ۲	$Minimize\ \lambda\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} x_i x_j \sigma_{ij}\right]-(1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} x_i \mu_i\right]$ Subject to $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ $\varepsilon_i \leq x_i \leq \delta_i \quad (i=1,\dots,n)$ $x_i \geq 0 \quad (i=1,\dots,n)$
مدل شماره ۳	$Minimize\ \lambda\left[\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N} z_i x_i z_j x_j \sigma_{ij}\right]-(1-\lambda)\left[\sum_{i=1}^{N} z_i x_i \mu_i\right]$ Subject to $\sum_{i=1}^{N} x_i = 1$ $\sum_{i=1}^{N} z_i = K$ $\varepsilon_i z_i \leq x_i \leq \delta_i z_i \quad (i=1,\dots,n)$ $z_i \in [0,1] \quad (i=1,\dots,n)$ $x_i \geq 0 \quad (i=1,\dots,n)$

متغیرها و پارامترهای تعریف شده در مورد مدل ۳ در قسمت‌های قبلی به‌تفصیل بیان شد. در ادامه به شبه کدی که مراحل مختلف الگوریتم برنامه‌نویسی مربوط به مدل ۳ را

نشان می‌دهد، اشاره می‌شود. این شبه کد در ادامه به صورت خلاصه بیان می‌شود. در مورد این الگوریتم گفتنی است، از ساده‌ترین اصطلاحات برنامه‌نویسی و در حد لزوم استفاده شده است. باید توجه داشت، الگوریتم ارایه شده بدنه اصلی برنامه کامپیوتری را نشان می‌دهد. برای اعمال محدودیت‌ها بر بردارهای موقعیت و سرعت از الگوریتم دیگری استفاده می‌شود که پس از آن ارایه خواهد شد.

Begin
$\lambda = 0$
While ($\lambda \le 1$ **)**
$P = 20\left[\sqrt{N}\right]$
معرفی اولیه تمام ذرات و سرعت‌ها #
به گونه‌ای که تمام محدودیت‌ها رعایت شود
$compute\ f_p$
$G_p = p;\ f_{Gp} = f_p \quad p = 1, \ldots, P$
$\gamma = \min(f_p) \quad p = 1, \ldots, P$
For $ctr = 1\, to \left[1000N/P\right]$
For $p = 1\, to\, P$
For $i = 1\, to\, N$
ذره p را در جهت z_i حرکت می‌دهیم #
If $z_{pi} = 1$ **then**
Compute vx_{pi}
If $vx_{pi} + x_{pi} \ge 0$ **then**
ذره p را در جهت x_i حرکت می‌دهیم #
Else
$z_{pi} = 0$
$x_{pi} = 0$
End If
End If
کلیه محدودیت‌ها را بر ذره p اعمال می‌کنیم #
$compute\ f_p$
If $f_p \prec f_{Gp}$ **then**
$G_p = p\ ,\ f_{Gp} = f_p$
End If
If $f_{Gp} \prec \gamma$
$\gamma = f_{Gp}$
$b = p$
End If
End For
End For
End For
$\lambda = \lambda + \Delta\lambda$
End While
End

هر کدام از معادلات ۴ و ۵ و ۶ یکی از محدودیت‌های اصلی مسئله بهینه‌سازی پرتفوی را نشان می‌دهد. در الگوریتمی که در ادامه ارایه می‌شود، برای هر یک از این محدودیت‌ها کدی وجود دارد. همان‌طور که در الگوریتم مشخص است، ابتدا معادله ۵ که مربوط به

محدودیت تعداد سهام منتخب است اعمال می‌شود. پس از آن محدودیت برابر یک بودن مجموع اوزان (معادله ۴) و درنهایت محدودیت مربوط به حد بالا و پایین سرمایه‌گذاری در هر سهم (معادله ۶) اعمال می‌شود.

بردار p **:** ذره‌ای که در این تکرار در حال حرکت (جواب مسئله) است.

مجموعه Q **:** مجموعه K_p^* سهم در ذره فعلی (سبد سهام)

x_{pi} : نسبت i سهم در پرتفوی p

z_{pi} : مقدار متغیر تصمیم در مورد سهم i در پرتفوی p

Begin

While ($K_p^* \prec K$ **)**

i= دارایی با بزرگ‌ترین مقدار c که $i \notin Q$ باشد

$\psi = \omega_1(Gx_{bi} - x_{pi}) + \omega_2(Gx_{pi} - x_{pi}) + x_{pi}$

If $vx_{pi} + \psi \geq 0$ **then**

$z_{pi} = 1$

$Q = Q \cup [i]$

$K_p^* = K_p^* + 1$

End If

End While

While ($K_p^* \succ K$ **)**

i= دارایی با کوچک‌ترین مقدار c که $i \in Q$ باشد

$z_{pi} = 0$

$Q = Q - [i]$

$K_p^* = K_p^* - 1$

End While

$\chi = \sum_{i \in Q} x_{pi}$

$x_{pi} = x_{pi} / \chi \quad \forall i \in Q$

$\eta = \sum_{i \in Q} \max(0, x_{pi} - \delta_i)$

$\phi = \sum_{i \in Q} \max(0, \varepsilon_i - x_{pi})$

If $\eta = 0$ **and** $\phi = 0$ **then**

خروج از الگوریتم

End If

$t_i = \max(0, \delta_i - x_{pi}) \quad \forall i \in Q$

$\delta^* = \sum_{i \in Q} t_i$

$\phi = \sum_{i \in Q} \max(0, \varepsilon_i - x_{pi})$

$e_i = \max(0, x_{pi} - \varepsilon_i) \quad \forall i \in Q$

$\varepsilon^* = \sum_{i \in Q} \varepsilon_i$

For $i = 1 to N$

If $z_{pi} = 1$ **then**

If $t_i \succ 0$ **then**

$x_{pi} = x_{pi} + (t_i / \delta^*) \times \eta$

Else

$x_{pi} = \delta_i$

End If

If $e_i \succ 0$ **then**

$x_{pi} = x_{pi} - (e_i / \varepsilon^*) \times \Phi$

Else

$x_{pi} = \varepsilon_i$

End If

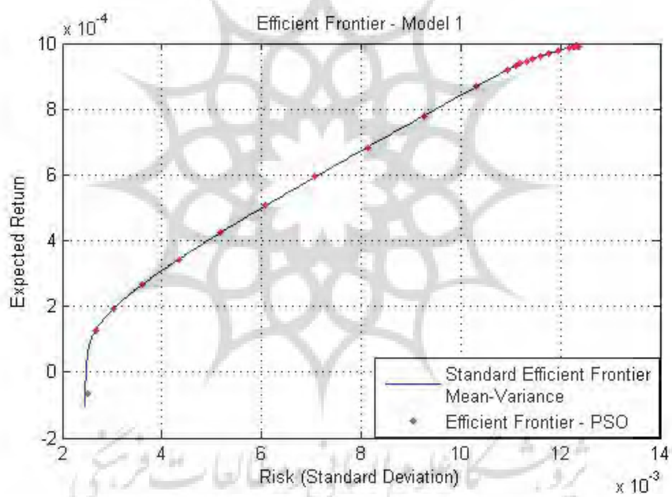
End If

End For

End

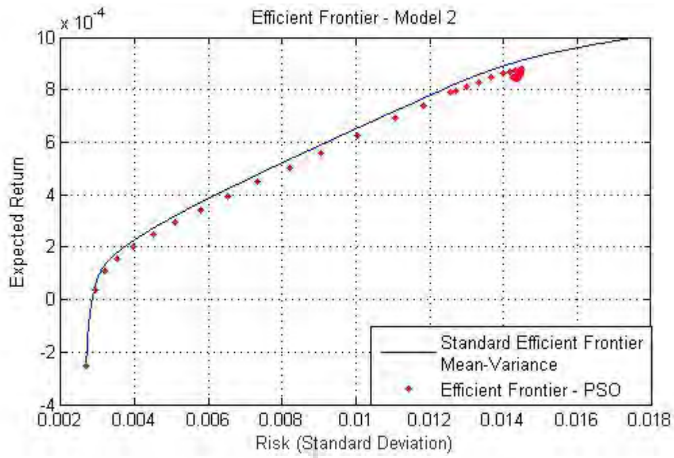
الگوریتم‌های فوق با استفاده از مقادیر $K=10$ و $\varepsilon_i = 0.001 \ (i=1,.....N)$ و $\delta_i = 1 \ (i=1,.....N)$ و $\Delta\lambda = 0.02$ محاسبه شده است. با توجه به این که $\Delta\lambda = 0.02$ است، الگوریتم مربوط ۵۱ بار تکرار می‌شود؛ بنابراین ۵۱ نقطه از مرز کارا به دست می‌آید.

نتایج به‌دست آمده از الگوریتم‌های فوق به همراه مرز کارای مدل میانگین- واریانس استاندارد مارکویتز در سه شکل جداگانه برای هر مدل رسم شده است. نقطه‌های سیاه روی منحنی رنگ مرز کارای به‌دست آمده از تکنیک PSO را نشان می‌دهند. همان‌طور که در شکل‌های زیر مشخص است، الگوریتم PSO توانسته است با دقت بسیار خوبی مسئله بهینه‌سازی پرتفوی را حل کند.



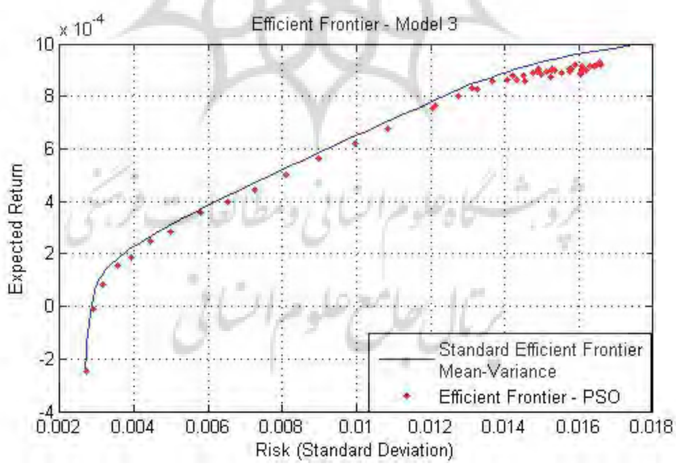
نمودار ۱. مرز کارای به‌دست آمده از مدل اول

همان‌طور که از مقایسه‌ی نمودار ۱ و ۲ مشخص می‌شود، با افزودن محدودیت مربوط به سهم هر دارایی در سبد سرمایه‌گذاری مرز کارای جدید پایین‌تر از مرز کارای مارکویتز قرار می‌گیرد.



نمودار ۲. مرز کارای به دست آمده از مدل دوم

برای حل مدل سوم نسبت به سایر مدل‌ها زمان بیشتری لازم است؛ که این زمان برای کامپیوتری با رم ۲ گیگا بایت و پردازشگر دو هسته‌ای ۲.۶۰ گیگا هرتز در حدود ۱۸ ثانیه طول کشیده است. بنابراین به لحاظ سرعت محاسبه نیز الگوریتم فوق نسبتاً کاراست.



نمودار ۴. مرز کارای به دست آمده از مدل سوم

۵- نتیجه‌گیری

موضوع این پژوهش درباره‌ی حل مسئله انتخاب پرتفوی و تعیین مرز کاراست. در این مطالعه مدل میانگین ـ واریانس مارکویتز با اعمال چند نوع محدودیت در سه مرحله مختلف با استفاده از روش فراابتکاری حرکت تجمعی ذرات حل شده است. در هر مرحله محدودیت‌های جدیدی به مدل افزوده می‌شود. مدل سوم (مجموعه معادلات مدل CCMV) ترکیبی از مسئله برنامه‌ریزی عدد صحیح و مسئله برنامه‌ریزی درجه دوم است؛ که برای حل دقیق این نوع مسایل الگوریتم‌های مؤثر و کارایی در برنامه‌ریزی ریاضی وجود ندارد.

مرز کارای به‌دست آمده از این روش با مرز کارای استاندارد در نمودارهای ۱ و ۲ و ۳ به‌طور همزمان رسم شده است. همان‌طور که در این نمودارها مشخص است، در هر سه مدل، در ریسک‌های پایین تکنیک PSO از دقت بیشتری برخوردار است و در ریسک‌های بالاتر دقت به‌مرور کاهش می‌یابد و فاصله مرز کارای استاندارد با مرز کارای به‌دست آمده از تکنیک PSO تا حدودی افزایش می‌یابد. الگوریتم PSO از نظر سرعت پردازش نیز از کارایی لازم برخوردار است و به‌عنوان مثال برای مدل سوم که از پیچیده‌ترین شکل برخوردار است، مدت زمانی که طول می‌کشد تا الگوریتم طراحی شده مرز کارا را رسم کند، تقریباً ۱۸ ثانیه است.

منابع

۱. تقوی فرد محمدتقی، منصوری طاها،خوش‌طینت محسن(۱۳۸۶). ارایه یک الگوریتم فراابتکاری جهت انخاب سبد سهام با در نظر گرفتن محدودیت‌های عدد صحیح. فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی، ۴ : ۴۹-۶۹.

۲. راعی رضا، تلنگی احمد(۱۳۸۳). مدیریت سرمایه‌گذاری پیشرفته. تهران: سازمان مطالعه و تدوین کتب علوم انسانی دانشگاه‌ها (سمت)، ۱۰۵-۱۴۲.

۳. عبدالعلی‌زاده شهیر سیمین، عشقی کوروش(۱۳۸۲). کاربرد الگوریتم ژنتیک در انتخاب یک مجموعه دارایی از سهام بورس اوراق بهادار. فصلنامه پژوهش‌های اقتصادی، ۱۷: ۱۷۵-۱۹۲.

4. Chiam s.c, kc. Tan, A Al. Mamum (2008). A memetic model of evolutionary PSO for computational finance applications. Expert Systems with Applications, 36:3695–3711.

5. Cura Tunchan (2009). Particle swarm optimization approach to portfolio optimization. Nonlinear Analysis: Real World Applications, 10:2396–2406.

6. Fernandez A, S Gomez (2007). Portfolio selection using neural networks. Computers & Operations Research, 34: 1177–1191.

7. H. Konno, H. Yamazaki (1991). Mean-absolute deviation portfolio in optimization model and its application to Tokyo stock market, Management Science 37: 519–531.

8. H.M Markowitz (1952). Portfolio selection. Journal of Finance, 77–91.

9. J Kennedy, R.C Eberhart (1995). Particle Swarm Optimization, in: Proc. IEEE Int'l Conf. on Neural Networks, 4:1942–1948.

10. J Kennedy, R.C Eberhart, Y Shi (2001). Swarm Intelligence, Morgan Kaufmann, San Mateo, CA, SA.

11. R Mansini, M.G Speranza (1999). Heuristic algorithms for the portfolio selection problem with minimum transaction lots, European Journal of Operational Research,114: 219–233.

12. T.J Chang, N Meade, J.E. Beasley, Y.M. Sharaiha (2000). Heuristics for cardinality constrained portfolio optimization, Computers & Operations Research 27: 1271–1302.

13. U Celikyurt, S Ozekici (2007). Multiperiod portfolio optimization models in stochastic markets using the mean-variance approach, European Journal of Operational Research 179: 186–202.

14. Yan Wei, Rong Miao, Shurong Li (2007). Multi-period semi-variance portfolio selection: Model and numerical solution. Applied Mathematics and Computation, 194:128–134.

15. Yin Peng-Yeng, Jing-Yu Wang (2006). A particle swarm optimization approach to the nonlinear resource allocation problem. Applied Mathematics and Computation, 183: 232–242.