معرفت فلسفی سال دوم، شماره دوم، زمستان ۱۳۸۳، ۱۳۴-۱۱۷

بررسی و تبیین برهان گودل

حسن عبدی

چکیده

"برهان گودل"[۱] چیست؟ این برهان چگونه نظریه مبناگروی[۲] در باب توجیه را به چالش می‌گیرد؟ و آیا برهان گودل از عهدهٔ نقد مبناگروی بر می‌آید یا نه؟ این سه پرسش‌هایی هستند که نوشتارحاضر در پی پاسخ‌گفتن به آنهاست. در مقدمه، نکات مقدماتی در باب تعریف رایج معرفت، مسئله توجیه و نظریه مبناگروی را از نظر خواهید گذراند. بدنه اصلی مقاله تحت عنوان "مطالب" به سه بخش تقسیم شده که هر بخشی عهده‌دار پاسخ‌گویی به یکی از پرسش‌های سه‌گانه است. در بخش اول وجه مشترک میان همه تقریرهای مبناگروی بیان شده است. در بخش دوم، طی دوازده مرحله برهان گودل تبیین شده، و سرانجام در بخش سوم، چهار پاسخ به برهان گودل مطرح گردیده است. در بخش نتیجه‌گیری نیز خلاصه‌ای از نتایج مقاله ارائه شده است.

کلید واژه‌ها:

توجیه، مبناگروی، برهان گودل، قضیه عدم تمامیت.

۱. مقدمه

از زمان افلاطون به این سوی، اکثر فیلسوفان معرفت را به "باورِ صادقِ موجه" تعریف کرده‌اند.[۳] اگرچه تامدت‌ها فیلسوفان ازکنار این‌تعریف به‌راحتی می‌گذشتند، در چنددهه اخیر نقد و بررسی هریک‌از عناصراین‌تعریف درکانون توجه معرفت‌شناسان قرارگرفته است.ازجمله عناصر سه‌گانه این تعریف عنصر "توجیه" است. کلیدی و بنیادین بودن بحث توجیه سبب شده تا حجم زیادی ازکتاب‌های معرفت‌شناسی به بررسی و نقدمعیار توجیه اختصاص یابد. امروزه در پاسخ به این پرسش که "معیار موجه بودن معرفت چیست؟" دیدگاه‌های مختلفی مطرح می‌شود که رایج‌ترین آنها نظریه مبناگروی و نظریه انسجام‌گرایی است.[۴] از میان این دو نظریه مبناگروی بیشتر کانون توجه بوده و می‌توان پیشینه آن را در یونان باستان، به‌ویژه در اندیشه‌های ارسطو پی‌گرفت.[۵]

به هر حال پیشینه مبناگروی هیچ گونه مصونیتی برای آن به همراه نداشته و در کتاب‌های معرفت‌شناسی نقدهای مختلفی بر آن وارد شده است. با مطالعه کتاب‌ها و مقالاتی که در زمینه معرفت‌شناسی نگارش یافته با نقدها و اشکال‌های مختلفی روبه‌رو می‌شویم. از جمله این نقدها ایرادی است که کورت گودلِ ریاضی‌دان و منطق‌دان در قالب برهان ریاضی بر این نظریه وارد کرده است.[۶] در باب این نقد نکته‌ای حاشیه‌ای نیز وجود دارد که بر پیچیدگی آن افزوده است. در موارد متعددی نویسندگان تنها به بیان این مطلب بسنده کرده‌اند که برهان گودل نقدی جدی بر نظریه مبناگروی به شمار می‌آید و به بهانه "دشواری فهم آن" از پرداختن به تبیین و توضیح برهان گودل پرهیز کرده یا حداکثر خوانندگان را به کتاب‌های دیگر راه‌نمایی کرده‌اند.[۷] از این روی، معمولاً این دو پرسش همواره خاطر خوانندگان این گونه آثار را به خود مشغول داشته است: اوّلاً محتوای برهان گودل چیست؟ ثانیاً، این برهان چگونه نظریه مبناگروی را به چالش می‌گیرد؟

۲. مطالب

در این بخش نخست تصویری از مبناگروی مطرح خواهیم ساخت و در ادامه می‌کوشیم تا به تصوری روشن از برهان گودل دست یابیم. سپس در بخش سوم به این مسئله می‌پردازیم که آیا

می‌توان این برهان را نقدی بر مبناگروی به شمار آورد یا نه؟

۱ـ۲. تبیین مبناگروی

بیان مفصل دیدگاه مبناگروی و پرداختن به تقریرهای گوناگونی که از آن ارائه شده در راستای اهداف این مقاله نیست. بنابراین تنها به طرح عصارهٔ این دیدگاه که به نظر می‌رسد در همه تقریرها مشترک باشد بسنده می‌شود. مبناگروی به دیدگاهی اطلاق می‌شود که در میان مجموعه باورها، گزاره‌ها یا معرفت‌ها ـ بر حسب تعبیرهای مختلفی که نویسندگان به کار برده‌اند ـ دسته‌ای را با نام باورها، گزاره‌ها یا معرفت‌های پایه مشخص می‌سازد و دیگر موارد را باورها، گزاره‌ها یا معرفت‌های غیر پایه می‌نامد، و مدعی است که دسته دوم توجیه خود را از ابتدا بر دسته نخست کسب می‌کنند. پس با فرض اینکه p، q و r نماد برای گزاره و S نماد برای فاعل شناسا باشد می‌توان گفت که عصارهٔ دیدگاه مبناگروی از این قرار است:

(۱) S باور دارد به p.

(۲) باور S به p یا

(۲/a) خود ـ موجه است؛ یعنی باور S به p به توجیه نیاز ندارد. (: باورهای پایه)

(۲/b) خود ـ موجه نیست؛ یعنی باور S به p بر اساس باور او به q توجیه شده است. (: باورهای غیر پایه)

(۳) باور S به q یا

(۳/a) خود ـ موجه است؛ یعنی باور S به q به توجیه نیاز ندارد.

(۳/b) خود ـ موجه نیست؛ یعنی باور S به q بر اساس باور او به r توجیه شده است.

۴. مجموعه باورهای غیر خود موجه S بر باورهای خود ـ موجه او مبتنی هستند.[۸]

۲ـ۲. تبیین برهان گودل

در آستانه تبیین این برهان توجه به دو نکته بجا خواهد بود. نکته اول اینکه اصل مقاله گودل به

زبان آلمانی است، و به دلیل دشواری آن، برخی کوشیده‌اند با اِعمال تغییراتی، از دشواری آن بکاهند. تقریرهای مختلفی را می‌توان تحت عنوان برهان گودل یافت. در این مقام ما به بیان تقریری خواهیم پرداخت که با وجود سادگی چندان از محتوای مقاله گودل فاصله نگرفته باشد.(۹) نکته دوم اینکه برای سهولت کار آن را در دوازده مرحله بیان می‌کنیم و البته مانند هر برهان دیگری پذیرش نتیجه نهایی منوط به پذیرش یک یک مقدمات آن است و هر گونه تردید در یکی از مقدمات، نتیجه را از اعتبار خواهد انداخت.

گودل با استفاده از منطق ریاضی نشان می‌دهد با فرض دستگاهی که گزاره‌های آن با استفاده از روش تأسیس اصل به اصول و قضایا تقسیم شده باشند، همیشه قضیه یا قضایایی به دست می‌آید که هم خود آنها و هم نقیضشان را می‌توان از اصول استنتاج کرد، و در نتیجه دستگاه مزبور ناسازگار است.(۱۰)

۱ـ۲ـ۲. مرحله اول

در منطق ریاضی، قواعد را با استفاده از نمادهایی بیان می‌کنند. در یک تقسیم، این نمادها بر دو قسم‌اند: نمادهای ثابت و نمادهای متغیر. نمادهای ثابت خود به دو دسته تقسیم می‌شوند: ادوات منطقی و نشانه‌های نقطه‌گذاری. نمادهای متغیر نیز سه دسته‌اند: متغیرهای عددی، که جایگزین اعداد می‌شوند؛ متغیرهای جمله‌ای، که به جای فرمول‌ها می‌نشینند؛ و متغیرهای محمولی، که جایگزین محمولات می‌شوند. گودل در ارائه استدلال خود از این نمادها بهره می‌گیرد. این نمادها عبارت‌اند از:

۱. نمادهای ثابت:

ادوات منطقی: $\exists \supset \vee \sim = S$ o؛

نشانه‌های نقطه‌گذاری: نمادِ)، نمادِ (و نمادِ ؛

۲. نمادهای متغیر:

متغیرهای عددی: x، y، z

متغیرهای جمله‌ای: p، q، r

متغیرهای محمولی: P، Q، R.

۲ـ۲ـ۲. مرحله دوم

گودل در گام بعد برای هر یک از این نمادها عدد منحصر به فردی در نظر می‌گیرد. شیوه‌ای که او برای تعیین عدد هر یک از نمادها برگزید به این صورت بود که برای نمادهای ثابت، به ترتیب، عددهای یک تا ده، و برای نمادهای متغیر عددی، به ترتیب، عددهای اول بزرگ‌تر از ده، و برای نمادهای متغیر جمله‌ای، به ترتیب، عددهای اول بزرگ‌تر از ده با توان دو، و برای نمادهای متغیر محمولی، به ترتیب، عددهای اول بزرگ‌تر از ده با توان سه را معین کرد:

۱. نمادهای ثابت:

ادوات منطقی:	~	∨	⊃	∃	=	O	S
عدد اختصاصی:	۱	۲	۳	٤	۵	٦	۷

نشانه‌های نقطه‌گذاری:	(	)	,
عدد اختصاصی:	۸	۹	۱۰

۲. نمادهای متغیّر:

متغیرهای عددی:	x	y	Z
عدد اختصاصی:	۱۱	۱۳	۱۷

متغیرهای جمله‌ای:	p	q	r
عدد اختصاصی	$۱۱^۲$	$۱۳^۲$	$۱۷^۲$

متغیرهای محمولی:	P	Q	R
عدد اختصاصی:	$۱۱^۳$	$۱۳^۳$	$۱۷^۳$

۳ـ۲ـ۲. مرحله سوم

با چنین شیوه‌ای می‌توان برای هر یک از اجزای یک فرمول منطقی یک عدد اختصاصی در نظر گرفت. برای مثال عدد اجزای این فرمول عبارت است از:

(	p	∨	p	)	⊃	p
۸	$۱۱^{۲}$	۲	$۱۱^{۲}$	۹	۳	$۱۱^{۲}$

۴ـ۲ـ۲. مرحله چهارم

در مرحله بعد گودل برای پرهیز از پیچیدگی استدلال شیوه‌ای در پیش گرفت که بر اساس آن به هر فرمولی تنها یک عدد منحصر به فرد نسبت داده شود. او برای این‌کار نخست به هر یک از اجزای فرمول به ترتیب یکی از عددهای اول را نسبت داد:

(	p	∨	p	)	⊃	p
۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷

۵ـ۲ـ۲. مرحله پنجم

سپس گودل عددهایی را که در مرحله قبل به هر یک از اجزا نسبت داده بود توان این عددهای اوّل در نظر گرفت:

(	p	∨	p	)	⊃	p
$۲^{۸}$	$۳^{۱۱}$	$۵^{۲}$	$۷^{۱۱}$	$۱۱^{۹^{۲}}$	$۱۳^{۳}$	$۱۷^{۱۱^{۲}}$

۶ـ۲ـ۲. مرحله ششم

در ادامه حاصل‌ضرب این عددها در یکدیگر را عدد منحصر به فرد آن فرمول به حساب آورد:

$$۲^{۸} \times ۳^{۱۱} \times ۵^{۲} \times ۷^{۱۱} \times ۱۱^{۹^{۲}} \times ۱۳^{۳} \times ۱۷^{۱۱^{۲}} = x$$

در اینجا برای روشن شدن نحوهٔ کار گودل فرمول زیر را که مفاد آن چنین است شماره‌گذاری می‌کنیم. "صفر مساوی صفر است"

(۱) $o \quad = \quad o$

(۲) ۶ ۵ ۶

(۳) ۲ ۳ ۵

(۴) $۲^{۶} \quad ۳^{۵} \quad ۵^{۶}$

(۵) $۲^{۶} \times ۳^{۵} \times ۵^{۶}$

(۶) ۶۴ × ۲۴۳ × ۱۵۶۲۵

(۷) ۲۴۳۰۰۰۰۰۰

بنابراین عدد گودل فرمول $0 = 0$ عبارت است از: ۲۴۳۰۰۰۰۰۰.

نکته‌ای که در این زمینه نباید از نظر دور داشت این است که هر عدد صحیحی عدد گودل نیست. برای نمونه عدد ۱۰۰ نه کوچک‌تر از ۱۰ است تا عدد گودل یکی از نمادهای ثابت باشد و نه عدد اول بزرگ‌تر از ۱۰، تا عدد گودل یکی از متغیرهای عددی باشد، و نه توان دوم عدد اول بزرگ‌تر از ۱۰ است تا عدد گودل یکی از متغیرهای جمله‌ای باشد، و نه توان سوم عدد اول بزرگ‌تر از ۱۰ است، تا عدد گودل یکی از متغیرهای محمولی باشد. افزون بر این با تجزیه عدد ۱۰۰ به $۲^۲ \times ۵^۲$ می‌رسیم، که ضرب عددهای اول متوالی نیست. از این روی، عدد ۱۰۰ عدد گودل نیست.

۷ـ۲ـ۲. مرحله هفتم

گودل پس از شماره‌گذاری نمادها و فرمول‌ها با استفاده از روابط میان اعداد، روابط میان عبارت‌های ریاضی و منطقی را تبیین کرد. برای مثال یکی از روابط میان اعداد ریاضی "فاکتور بودن" است. برای نمونه ۲ یکی از فاکتورهای عدد ۲۰ است. گودل با توجه به رابطه "فاکتور بودن" میان اعداد چنین نتیجه گرفت که هر گاه یکی از اعداد گودل فاکتور عدد گودل دیگر باشد، عبارت متناظر با عدد نخست نیز فاکتور عبارت متناظر با عدد دوم خواهد بود. برای مثال عددِ گودل ۶۴ فاکتور عددِ گودل ۲۴۳۰۰۰۰۰۰ است. بنابراین عبارت متناظر با عدد ۶۴ فاکتور عبارت متناظر با عدد ۲۴۳۰۰۰۰۰۰ خواهد بود. برای نشان دادن این رابطه، هر یک از دو عدد مذبور را به اعداد اول تجزیه می‌کنیم بنابراین خواهیم داشت:

نخست عدد ٦٤ را به اعداد اول تجزیه می کنیم بنابراین خواهیم داشت:

٦٤ (١)

$۲^٦$ (٢)

٢ (٣)

٦ (٤)

٠ (٥)

و با تجزیهٔ عدد ۲۴۳۰۰۰۰۰۰ به اعداد اول نیز خواهیم داشت:

(۱) ۲۴۳۰۰۰۰۰۰

(۲) ۶۴ × ۲۴۳ × ۱۵۶۲۵

(۳) $۲^{۶} \times ۳^{۵} \times ۵^{۶}$

(۴) $۲^{۶}$ $۳^{۵}$ $۵^{۶}$

(۵) ۲ ۳ ۵

(۶) ۶ ۵ ۶

(۷) ۰ = ۰

به این ترتیب می‌بینیم که ۵ فاکتوری برای عبارت ۰ = ۰ است.

یکی دیگر از رابطه‌های میان عبارت‌های ریاضی و منطقی، رابطه "برهان بودن" است. فرض کنید فرمولی داریم که عدد گودل آن x است، و فرمول دیگری داریم که عدد گودل آن z است. وقتی رابطه فرمول اول را با فرمول دوم بررسی می‌کنیم در می‌یابیم که فرمول x برهانی بر اثبات فرمول z است. طبق روش گودل می‌توان برای رابطه "برهان بودن" نمادی در نظر گرفت و برای نماد مزبور نیز طبق روش شماره‌گذاری گودل عددی اختصاص داد. بنابراین هر گاه میان یکی از اعداد گودل و عدد گودل دیگری رابطه برهان بودن برقرار بود، می‌توان نتیجه گرفت که میان عبارت‌های متناظر با آنها نیز چنین رابطه‌ای برقرار است. رابطه مزبور را می‌توان به این صورت نمایش داد: Dem (x,z)

دراین عبارت Dem مخفف demonstration به‌معنای برهان است، و مفاد عبارت این‌است که فرمولی با عدد گودل x برهانی بر فرمولی با عدد گودل z است، یا مفاد عبارت ~Dem (y,z) آن این است که فرمولی با عدد گودل y برهانی بر فرمولی با عدد گودل z نیست.

۸ـ۲ـ۲. مرحله هشتم

گودل در ادامه، روش شماره‌گذاری خود را به احکام فوق ریاضی نیز گسترش داد. احکامی را فوق ریاضی می‌خوانند که نه ناظر به اعداد، بلکه ناظر به عبارت‌های ناظر به رابطه میان اعداد هستند. برای نمونه این فرمول را در نظر بگیرید: $(\exists x)(x = sy)$

معنای این فرمول آن است که یک x وجود دارد به طوری که x تالی y است، و در واقع مفاد آن این است که هر عددی یک تالی دارد. عدد گودل این عبارتِ ناظر به رابطه میان اعداد عبارت

است از:

	(	∃	x	)	(	x	=	s	y	)
(۱)	۸	۴	۱۱	۹	۸	۱۱	۵	۷	۱۳	۹
(۲)	۲	۳	۵	۷	۱۱	۱۳	۱۷	۱۹	۲۳	۲۹
(۳)	$۲^{۸}$	$۳^{۴}$	$۵^{۱۱}$	$۷^{۹}$	$۱۱^{۸}$	$۱۳^{۱۱}$	$۱۷^{۵}$	$۱۹^{۷}$	$۲۳^{۱۳}$	$۲۹^{۹}$

(٤) $۲^{۸} \times ۳^{۴} \times ۵^{۱۱} \times ۷^{۹} \times ۱۱^{۸} \times ۱۳^{۱۱} \times ۱۷^{۵} \times ۱۹^{۷} \times ۲۳^{۱۳} \times ۲۹^{۹}$

در اینجا با توجه به بیش از اندازه بزرگ بودن عدد گودل فرمول مزبور و برای سهولت در کار، این عدد را m می‌خوانیم. حال گودل فرمول جدیدی مطرح می‌سازد که حکمی را دربارهٔ فرمول با عدد گودل m بیان می‌کند. گودل برای اینکه نشان دهد فرمول جدید شامل حکمی دربارهٔ فرمول قبلی است و در واقع یک حکم فوق ریاضی را بیان می‌کند نماد m را جایگزین نماد y در فرمول قبلی می‌سازد. به این صورت:

(۱) (∃ x) (x = s y)

(۲) (∃ x) (x = s m)

این فرمول جدید نیز دارای عدد گودل خاص خود است که می‌توان بر اساس شیوهٔ شماره‌گذاری گودل عدد آن را محاسبه کرد. گودل برای آنکه نشان دهد یک فرمول حکم فوق ریاضی را بیان می‌کند از عبارت Sub (m, 13, m) استفاده کرد. در این عبارت Sub مخفف substitute به معنای جانشین است، و مفاد عبارت این است که عدد خاصی عدد گودل یک فرمول است که از فرمول دیگر با عدد m از طریق جانشینی نماد m به جای متغیری با عدد گودل ۱۳ (y) به دست آمده است.

۹ـ۲ـ۲. مرحله نهم

گفتیم که فرمول Dem (x,z)~ حکمی فوق ریاضی را به این مضمون بیان می‌کند: رشته‌ای از فرمول‌ها با عدد گودل x برهانی برای فرمولی با عدد گودل z نیست. حال پیشوند (x) را به فرمول مزبور می‌افزاییم. در این صورت خواهیم داشت: (x).~Dem (x,z) مفاد این فرمول چنین است:

"برای هر رشته‌ای از فرمول‌ها که عدد گودل آن x است یک برهان برای فرمولی با عدد گودل z نیست". حال به جای نماد z در این فرمول، فرمول دیگری قرار می‌دهیم. این فرمول همان است که پیش‌تر آن را به این صورت نمایش دادیم: Sub (y, 13 ,y). در نتیجه خواهیم داشت:

(۱)	(X)	~ Dem (X ,	Z)
(۲)			Sub (y ,۱۳ , y))
(۳)	(X)	~ Dem (X ,	Sub (y ,۱۳ , y))

حال فرمولی به دست آورده‌ایم که دربارهٔ فرمول دیگری است و مفاد آن این است که "برای x رشته‌ای از فرمول‌ها که عدد گودل آن x است، یک برهان برای فرمولی با عدد گودل Sub (y, 13 ,y) نیست" یا به تعبیر دیگر "فرمولی با عدد گودل y قابل اثبات نیست". ولی از آنجا که به هر روی، این فرمول به دست آمده "فرمول" است، عدد گودل خاصی خواهد داشت و می‌توان به روش پیش‌گفته عدد گودل آن را به دست آورد. در اینجا برای سهولت کار فرض می‌کنیم که عدد گودل آن n است. بنابر مطالب مطرح شده در مرحله هشتم عدد n را جانشین نماد متغیر y می‌سازیم. بنابراین خواهیم داشت:

(۱) (x)~Dem (x, Sub (y,13,y))

(۲) n

(۳) (x)~Dem (x, Sub (n,13,n))

مفاد این فرمول آن است که "برای x رشته‌ای از فرمول‌ها که عدد گودل آن x است، یک برهان برای فرمولی با عدد گودل Sub(n, 13, n) نیست". نکته مهم این است که اگر گودل بتواند نشان دهد عدد فرمول (۳) نیز همان Sub (n, 13, n) است، مفاد عبارت (۳) آن خواهد بود که "برای x رشته‌ای از فرمول‌ها که عدد گودل آن x است، برهانی برای خود این فرمول نیست." به تعبیر دیگر فرمول مزبور می‌گوید: "این فرمول (یعنی خودش) قابل اثبات نیست". اما گودل چگونه نشان می‌دهد که عدد فرمول (۳) نیز همان Sub (n, 13, n) است. پاسخ این پرسش را در مرحله دهم پی می‌گیریم.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

۱۰ـ۲ـ۲. مرحله دهم

این مرحله مهم‌ترین مرحله در برهان گودل است. او می‌کوشد تا به این پرسش پاسخ دهد که چرا عدد فرمول (۳) نیز همان Sub (n, 13, n) است. پاسخ وی این است که در مرحله نهم و بنابر روش عددگذاریِ فرمول‌های احکام فوق ریاضی نشان دادیم که فرمولی داریم به این صورت:

(۳)(x)~Dem (x, Sub (y,13,y))

که مفاد آن عبارت است از اینکه "برای x، رشته‌ای از فرمول‌ها که عـدد گـودل آن x است، یک برهان برای فرمولی با عدد گودل Sub (y,13 ,y) نیست" یا به تعبیر دیگر "فرمولی با عدد گودل y قابل اثبات نیست." و این فرمول عدد گودل خاصی دارد که ما برای سهولت کار فرض می‌کنیم آن عدد n است. نکته مهم این است که این عددْ عددِ هر فرمولی است که مفاد آن عبارت باشد از "فرمولی با عدد گودل y قابل اثبات نیست". از این روی، عدد y هم عددِ فرمول Sub (n, 13, n) است و هم عددِ فرمول ((x)~Dem (x, Sub (n, 13, n، بنابراین عددِ هر دو فرمول یکـی است.

۱۱ـ۲ـ۲. مرحله یازدهم

نتیجه‌ای که از مراحل ده‌گانه بالا به دست می‌آید این است که با فرض هر مجموعه‌ای از گزاره‌ها همیشه یک گزاره وجود خواهد داشت که نه جزو اصـول است و نـه مـی‌توان آن را از اصـول استنتاج کرد؛ زیرا همیشه گزاره‌ای خواهیم داشت که می‌گوید: "برای x، رشته‌ای از فرمول‌ها کـه عدد گودل آن x است، یک برهان برای فرمولی با عدد گودل Sub (y, 13 ,y) نیست". به تعبیر دیگر "فرمولی با عدد گودل y قابل اثبات نیست" و به عبارت واضح‌تر "من گزاره‌ای هستم که نه جزو اصول هستم و نه از گزاره‌های دیگر قابل استنتاج هستم". می‌دانیم که حتی همین نتیجه نیز ادعای مبناگرا را به چالش می‌گیرد؛ این ادعا را که "باورهای یک مـجموعه، از دو حـال خـارج نیست؛ یا باوری است که جزو اصول به حساب می‌آید یا باوری است که از اصول قابل استنتاج است". لیکن گودل برهان خود را گسترش می‌دهد و به نتیجه‌ای ویران‌گرتر می‌رسد.

۱۲ـ۲ـ۲. مرحله دوازدهم

گودل در مرحله یازدهم نشان داد که فرمولی ناظر به یک حکم فوق ریاضی، با این مفاد داریم: "فرمولی با عدد گودل y قابل اثبات نیست". به عبارت واضح‌تر "من گزاره‌ای هستم که نه جزو اصول هستم و نه از گزاره‌های دیگر قابل استنتاج هستم". اجازه دهید که ما این گزاره را G بنامیم.

حال گودل می‌گوید اگر کسی ادعا کند که گزارهٔ G را می‌توان از اصول استنتاج کرد، در پاسخ با استفاده از این قاعدهٔ منطق ریاضی که می‌گوید: "از هر قضیه‌ای می‌توان نقیض آن را نتیجه گرفت" یا به عبارت دیگر "p مستلزم p~ است" می‌توانیم این گونه نتیجه بگیریم که اگر G آن‌گاه G~. بنابراین با فرض هر مجموعه‌ای از گزاره‌ها همیشه گزاره‌ای وجود دارد که هم می‌توان آن را از اصول استنتاج کرد و هم می‌توان نقیض آن را از اصول استنتاج کرد! بنابراین ادعای مبناگرا که "باورهای پایه باورهایی هستند که خود موجه‌اند و باورهای غیر پایه برای موجه شدن باید از باورهای پایه و بر اساس استنتاج به دست آیند" نادرست است؛ زیرا هم می‌توان باور به گزارهٔ G را بر اساس باورهای پایه توجیه کرد و هم باور به گزارهٔ G~ را![11]

۳ـ۲. بررسی برهان گودل

واکنش نویسندگان غربی به پیام این برهان متفاوت بوده است: در حالی که عده‌ای آن را نادیده انگاشته و بسادگی از کنار آن گذشته‌اند، گروهی دیگر که بیشتر منتقدان مبناگروی بشمار می‌آیند با اشاره‌ای اجمالی به نتیجه برهان، از آن در جهت تضعیف موضع مبناگرایان سود برده‌اند؛ و در این میان معدود کسانی را می‌توان یافت که در صدد پاسخ‌گویی بر آمده باشند. در این بخش پاره‌ای از پاسخ‌ها در دفاع از مبناگروی و در ردّ برهان را از نظر می‌گذرانیم.

۱ـ۳ـ۲. پاسخ اول

در پاسخ اول گفته‌اند که بر اساس برهان گودل مبناگرایان از عهده اثبات همه گزاره‌های خود ناتوان‌اند؛ در حالی که برای مبناگرا همین کافی است که اغلب گزاره‌های خود را اثبات کند؛ به‌ویژه آنکه گزاره‌های اثبات ناپذیر گونه خاصی از گزاره‌هایند؛ یعنی گزاره‌هایی که ناظر به خود[12] هستند. بنابراین برهان گودل چالشی جدی به شمار نمی‌آید.[13]

بررسی

به نظر می‌رسد این پاسخ دو ضعف عمده دارد: اول اینکه در واقع اشکال گودل را پذیرفته است نه اینکه آن را رد کرده باشد. از این روی، غیرمستقیم مفاد برهان را تأیید کرده است؛ دیگر اینکه گودل می‌تواند در دفاع از خود مدعی شود اگر همیشه احتمال وجود گزارهٔ صادقی در میان مجموعه گزاره‌ها وجود داشته باشد که هم خود گزاره و هم نقیض آن از گزاره‌های پایه قابل استنتاج‌باشد، آن گاه دربارهٔ هر گزاره‌ای از گزاره‌های این مجموعه باچنین‌احتمالی مواجه خواهیم بود،و همین امر بنیان‌یقین و باور ما را به‌صدق همه‌گزاره‌های این مجموعه‌متزلزل خواهدساخت.

۲ـ۳ـ۲. پاسخ دوم

در پاسخ دوم بر تعداد محدود گزاره‌های مورد نظر گودل تأکید شده است. اگرچه گزاره‌هایی که هم خود آنها و هم نقیض آنها از گزاره‌های پایه قابل استنتاج هستند پیوند عمیقی با معرفت‌شناسی دارند، شمار آنها زیاد نیست. افزون بر این اغلب چنین گزاره‌هایی یا به نحو شگفت‌آوری صادق‌اند، مانند "من راست می‌گویم" یا بی‌معنا هستند، مانند "من دروغ می‌گویم"، و آن گزاره‌هایی که ناظر به خود نظام شناختاری‌اند و گویای مطلبی هستند که برای مثال ناظر به انسجام آن نظام است آن چنان هم که به نظر می‌رسد مبناگرا را در تنگنا قرار نمی‌دهند؛ زیرا هرچند من نتوانم انسجام نظام باورهای خود را اثبات کنم و شما هم نتوانید از عهده اثبات نظام باورهای خود بر آیید، شما می‌توانید انسجام نظام باورهای من را اثبات کنید و من هم می‌توانم انسجام نظام باورهای شما را اثبات کنم. بنابراین من این توانایی را دارم که همه گزاره‌های نظام باور فرد دیگری را اثبات کنم.[۱۴]

بررسی

به نظر می‌رسد اولاً، در این پاسخ نیز مفاد و نتیجه برهان گودل پذیرفته شده است؛ زیرا ادعای گودل چیزی بیش از این نیست که همیشه گزاره‌ای وجود دارد که هم خود آن گزاره و هم نقیض آن قابل استنتاج از گزاره‌های پایه است؛ اگرچه ما نتوانیم معین کنیم که این گزاره کدام یک از گزاره‌های مجموعه باورهای ماست؛ ثانیاً، همان گونه که در آغاز این نوشتار اشاره کردیم، در

تلقی رایج، معرفت عبارت است از "باور صادق موجه". از این روی، معرفت همیشه عنصر باور را با خود به همراه دارد و با توجه به این که باور امری است که قائم به شخص باورکننده است دیگر نمی‌توان از ناموجّه بودن گزاره‌ای که من به آن باور دارم نزد خود و موجّه بودن آن نزد دیگران سخن به میان آورد.

۲-۳-۳. پاسخ سوم

در پاسخ سوم بر اهداف معرفت‌شناسی به عنوان معیاری برای ارزیابی برهان گودل تأکید شده است. اصولاً معرفت‌شناسان از طرح مسائل معرفت‌شناختی اهدافی را دنبال می‌کنند؛ از جمله طرح و اثبات یا رد ادعاهایی نظیر چیستی معرفت، و امکان معرفت، رابطه هر معرفتی در قبال دیگر معرفت‌ها. حال اگرچه نتوان همه گزاره‌های صادق را اثبات کرد و نشان داد چنین نیست که هم‌خود آن‌گزاره‌ها و هم نقیض آنها از گزاره‌های پایه قابل استنتاج‌اند، می‌توان‌آنها را صورتبندی‌و نقادی کرد، و برای‌اثبات یا ردشان دلیل آورد و همین‌برای‌اهداف معرفت‌شناس کافی‌است.[۱۵]

بررسی

به نظر می‌رسد که اولاً در این پاسخ نیز مانند دو پاسخ پیشین اشکال گودل پذیرفته شده است، و به این ترتیب دیگر جایی برای بحث از اهداف معرفت‌شناسی باقی نمی‌ماند؛ زیرا به گمان گودل برهان وی ویران‌کنندهٔ هر نظام معرفتی‌ای است که در سایه دیدگاه مبناگروی شکل گرفته باشد. در این صورت چگونه می‌توان از اهداف معرفت‌شناسی دم زد در حالی که پایه و مبنایی برای پذیرش آنها وجود ندارد؛ ثانیاً، اگر در جست‌وجوی اهداف معرفت‌شناسی به این نتیجه رسیدیم که هدف معرفت‌شناسی ارائه‌یک نظام مبناگرایانه از مجموعه گزاره‌هایی است که فرد به آن باور دارد آیا باز هم می‌توان از کنار پیامدهای این برهان به سادگی گذشت؟

۲-۳-۴. پاسخ چهارم

به نظر می‌رسد همه این پاسخ‌ها بر فرض تمام بودن برهان گودل اقامه شده است و مبناگرا در موقعیتی قرار گرفته که چاره‌ای جز دست شستن از برخی گزاره‌های خود ندارد. ولی بد نیست

بپرسیم که آیا به راستی برهان گودل بر عدم تمامیت تمام است؟ شاید بتوان با نگاهی دوباره به مراحل دوازده‌گانه برهان به مواردی از ابهام دست یافت.

برای بررسی دقیق این برهان پیش از هر چیز باید میان دو دسته از گزاره‌ها تمایز نهیم: گزاره‌های درجه اول و گزاره‌های درجه دوم. گزاره‌های درجه اول گزاره‌هایی هستند که محمولی را به یک یا مجموعه‌ای از اشیای خارجی و عینی نسبت می‌دهند. برای مثال در دانش فیزیک حرکت را به اتم‌های یک مولکول، یا وصفی را به یک شیء نسبت می‌دهند. برای مثال می‌گویند: "آب در دمای معمولی مایع است." در مقابل، گزاره‌های درجه دوم قرار دارند که از اصول حاکم بر گزاره‌های درجه اول بحث می‌کنند؛ مانند: "گزاره‌های حاصل از حواس پنج‌گانه خطاپذیر هستند." روشن است که نسبت دادن حرکت، وزن، جاذبه و ... به اشیا در دانش فیزیک منوط به معرفت‌بخش بودن حواس پنج‌گانه است. از این روی، گزاره‌های درجه دوم ناظر به گزاره‌های درجه اول و حاکم بر آنها هستند.

نکته مهم در این تمایز آن است که نباید معیارهای بررسی صدق و کذب گزاره‌های درجه اول را با بررسی صدق و کذب گزاره‌های درجه دوم یکی بپنداریم. اگر ملاک ارزیابی مایع بودن یا نبودن آب در دانش فیزیک به ادراک حواس پنج‌گانه بستگی دارد، برای ارزیابی گزاره‌های درجه دوم که برای مثال به بررسی اعتبار ادراک حسی می‌پردازد نمی‌توان به‌خود ادراک حسّی اعتماد کرد، بلکه باید اصول بدیهی عقل را معیار قرار داد. حال گودل در بیان پیچیدهٔ خود مرتکب جهش از احکام گزاره‌های درجه اول به احکام گزاره‌های درجه دوم شده است، و همین جهش باعث شده تا بیان برهان‌نمای او چیزی نباشد جز یک مغالطه.

توضیح آنکه هدف گودل در استفاده از روش عددگذاری آن است که با اختصاص دادن یک عدد به هر فرمولی ضمن آنکه از روشی کاملاً صوری و ریاضی استفاده می‌کند نتیجه بگیرد که چون همه عددها به یک مجموعه – برای مثال مجموعه عددهای صحیح – تعلق دارند، گزاره‌های معادل آنها نیز به یک مجموعه متعلق خواهند بود، و درست در همین مرحله است که گودل مرتکب یک جهش شده و یک عدد خاص را هم به فرمول‌های ناظر به احکام ریاضی

اختصاص می‌دهد، و هم به فرمول‌های ناظر به احکام فوق ریاضی، و همان گونه که در مرحله دهم دیدیم مدعی است که «عدد n هم عددِ فرمول Sub (n, 13, n) است و هم عددِ فرمول $(x)\sim Dem\ (x,Sub(n, 13, n))$. بنابراین عددِ هر دو فرمول یکی است» در حالی که احکام فوق ریاضی به مجموعه دیگری اختصاص دارند؛ یعنی مجموعه ناظر مربوط به مجموعه احکام ریاضی، و از همین جهت است که آنها را احکام فوق ریاضی می‌نامند. وقتی احکام فوق ریاضی به مجموعه دیگری تعلق داشتند، اصول خاص خود را خواهند داشت. به تعبیر ساده‌تر می‌توان گفت که در بیان گودل بین احکام در حساب و احکام دربارهٔ حساب خلط شده است.

۳. نتیجه‌گیری

خلاصه آنکه به‌رغم ابتکاری بودن برهان گودل و ابتنای آن بر اصول دقیق منطق و ریاضی، در این برهان تنها بر جنبه‌های منطقی و ریاضی مجموعه گزاره‌ها تمرکز شده و حیثیت معرفت‌شناختی رابطه گزاره‌های این مجموعه با یکدیگر از نظر دور مانده است و همین امر سبب شده تا با در هم آمیختن احکام گزاره‌های درجه اول و گزاره‌های درجه دوم، آن را نقدی بر دیدگاه مبناگروی به شمار آورند؛ غافل از اینکه اثبات نادرستی دیدگاه مبناگروی در وهله اول دامن‌گیر خود برهان گودل نیز خواهد شد؛ چه در این برهان نیز با مجموعه‌ای از گزاره‌ها مواجهیم که یکی بر دیگری مبتنی است و گزارهٔ مشتمل بر نتیجه بر همه گزاره‌های قبلی.

پی‌نوشت‌ها

1. Godel's theorem.
2. Foundationalism.

۳- منصور شمس، آشنایی با معرفت‌شناسی (قم، انجمن معارف اسلامی ایران، ۱۳۸۲)، ص ۵۸-۵۹.

۴- هم‌اندیشی معرفت‌شناسی، متن پیاده شده سلسله مباحث اساتید محترم: محمدتقی مصباح یزدی، محمد لگنهاوزن، غلامرضا فیاضی و صادق لاریجانی (ایّدهم اللّه)، جلسه یازدهم، ص ۱.

5. *The Encyclopedia Of Philosophy*, ed. in chief: Paul Edwards, New York: Macmillan Publishing Co. Inc. & The Fraa Press, 1967, Vol. 3, p. 13.
6. Quine, W. V. *Ontological Relativity & Other Essays,* New York: Columbia University Press, 1969. P. 70: "Moreover, we know from Godel's work that no consistent axiom system can cover, mathematics even when we renounce self-evidence".
7. Everit, Nicholas & Alec Fishe, *Modern Epistemology,* New York: McGraw Hill, Inc 1995, PP. 98-99.
8. Dancy, Jonathan & Ernest Sosa, *A Companion To Epistemology*, Oxford, Blackwell Publishers,1992, pp. 144-147.
9. Smullyan, Raymond M. *Godel's Incompletenss Theorems,* New York, Oxford University Press, 1992. P.P. 56-74.

۱۰- برخی وجه تعارض برهان گودل با مبناگروی را این گونه بیان کرده‌اند که با فرض یک مجموعه از گزاره‌ها، باورها یا معرفت‌ها همیشه یک گزاره، باور یا معرفتی وجود خواهد داشت که هم صادق است و هم قابل استنتاج از گزاره‌های پایه نیست. برای نمونه مراجعه کنید به:

Everit, Nicholas & Alec Fishe, *Modern Epistemology,* McGraw Hill, Inc. New York, 1995, P.98.

11. Everit, Nicholas & Alec Fishe, *Modern Epistemology,* McGraw Hill, Inc. New York, 1995, P. 98.

۱۲- برای آگاهی از تقریرهای مختلف برهان گودل می‌توانید به این منابع مراجعه کنید:

Smullyan, Raymond M. *Godel's Incompletenss Theorems,* New York, Oxford University Press, 1992. PP. 56-74.

Uspensky, V. A, *Godel's Incompleteness Theorems,* Moscow: Mir Publishers, 1982.

Negel, Ernest, and James Newman, *Godel's Proof*, London: Routledge and Kegan Paul, 1959.

در این نوشتار از تقریری که در کتاب اخیر مطرح گردیده استفاده شده است.

13. Self-referring.

14. *Evolutionary Epistemology, Rationality, and The Sociology of Knowledge,* Edited By Gerard Radnitzky, W. W. Bartly, III. Open Cowrt, The unedited States of America, 1187. P. 169.

15. Ibid.

منابع

الف – فارسی

- شمس، منصور، *آشنایی با معرفت‌شناسی*، (قم، انجمن معارف اسلامی ایران، ۱۳۸۲)؛
- مصباح، محمدتقی و دیگران، *هم‌اندیشی معرفت‌شناسی*، جلسه یازدهم؛ (متن پیاده‌شده)؛

ب – لاتین

- *The Encyclopedia Of Philosophy,* ed. in chief: Paul Edwards, New York: Macmillan Publishing Co. Inc. & The Fraa Press, 1997, Vol. 3.
- Quine, W. V. *Ontological Relativity & Other Essays,* New York: Columbia University Press, 1969: "Moreover, we know from Godel's work that no consistent axiom system can cover mathematics even when we renounce self-evidence".
- Everit, Nicholas & Alec Fishe, *Modern Epistemology,* New York: McGraw Hill, Inc. 1995.
- Dancy, Jonathan & Ernest Sosa, *A Companion To Epistemology,* Oxford, Blackwell Publishers, 1992.
- Smullyan, Raymond M. *Godel's Incompletenss Theorems,* New York, Oxford University Press 1992.
- Uspensky, V. A, *Godel's Incompleteness Theorems,* Moscow: Mir Publishers, 1982.
- Negel, Ernest, and James Newman, *Godel's Proof,* London: Routledge and Kegan Paul, 1959.
- Evolutionary Epistemology, *Rationality, and the Sociology of Knowledge,* edited By Gerard Radnitzky, W. W. Bartly, III. Open Cowrt, The unedited States of America, 1187.