کاربرد انواع توابع ریاضی در برآورد مدلهای اقتصادی وبازرگانی ایران

دکتر محمدرضا حمیدی‌زاده*

چکیده

هدف مقاله، طرح اشکال مختلف مدلهای برآورد خطی و غیرخطی رگرسیونی است. از این مدلها می‌توان در چهارچوب درون یابی و برون‌یابی معادلات رفتاری متغیرهای بازرگانی و اقتصادی در سطح خود و کلان استفاده به عمل آورد. بررسی چند مدل برآورد ایران در تناسب با اشکال تابعی بر توانایی استفاده از این مدلها جهت پیش‌بینی متغیرها برای افقهای کوتاه مدت و میان مدت تاکید می‌ورزد.

* عضو هیأت علمی دانشگاه شهید بهشتی

مقدمه

اساساً، برای شناخت مدلها و افزایش توانایی مدلسازی و تبیین نوع مدلها بر اساس حرکات و رفتارهای گذشته متغیرها، آشنایی با روش شناسی اشکال تابعی مدلهای برآورد، ضروری است. شرط نخستین هر مدلسازی، آگاهی سودمند داشتن از رفتار مدلها و قدرت تبیین آنها و تناسب پذیرش نوع متغیرها در ارتباط با حرکاتشان است. عموماً، از متغیرها برای پیش‌بینی وقایع آتی و حرکات آنها در سطح کلان و حتی خرد اقتصادی و بازرگانی، و نیز در مقیاس‌های صنعت و بنگاههای صنعتی و تولیدی با استفاده از مدلهای درون‌یابی و برون‌یابی، بهره‌برداری به عمل می‌آید.

از اینرو، در این مقاله ابتدا طیف گسترده‌ای از اشکال تابعی[1] مدلها که شامل اشکال خطی تا اشکال لوژستیک شده و متجاوز از سی‌و پنج نوع می‌شوند، طرح و بررسی و تحلیل می‌شوند. آنگاه نمونه‌هایی از مدلهای رایج برآورد در ایران که در مطالعات بازرگانی و اقتصادی یافت می‌شوند، عرضه می‌شوند. این مدلها شامل مدلهای برآورد مربوط به تحقیقات وزارت امور اقتصاد و دارایی (۱۳۷۶ و ۱۳۷۳)، سازمان برنامه و بودجه (۱۳۶۷)، عسلی (۱۳۷۵)، حمیدی‌زاده (۱۳۷۶، ۱۳۷۴) ، نعمتی (۱۳۷۶)، صفایی (۱۳۶۵)، آق اولی و ساسانپور (۱۳۶۱)، آپادانا(۱۳۵۷) و شهشهانی (۱۳۵۵) هستند.

در خاتمه، ضمن طرح چند مدل درون‌یابی و برون‌یابی که نگارنده آنها را برای رشد اقتصادی، صادرات نفتی، نرخ رسمی ارز (دلار) و واردات کل برآورد نموده، ارایه می‌شود.

۱. بیان مساله و ضرورت تحقیق

بطور کلی، برای تبیین مدلهای درون‌یابی و برون یابی، یکی از حادترین مسایلی که محققان با آن روبرو می‌شوند، شناسایی نوع مدل خطی و غیرخطی برای پردازش داده‌های سری زمانی متغیرهای تحت مطالعه است. ترسیم نمودار متغیرها و تشریح مبانی نظری روابط علّی در چارچوب مباحث علمی، شرط نخستین مدلسازی است، اما مجهز بودن به ساختارشناسی روابط میان متغیرها و علت‌یابی حرکات و رفتار گذشته آنها، علاوه بر در اختیار داشتن دانش مربوط و شناخت انوع اشکال تابعی مدلها و مهارت در تشخیص دقیق آنها، ضروری است.

1. Functional Forms

نظر به گسترده و متنوع بودن اشکال تابعی مدلها از دیگر مسایلی که غالباً سد راه محققان در مدلسازی و تخمین متغیرها می‌شوند، آگاهی محدود از تنوع مدلها و تبیین حرکات و رفتار آنها در چارچوب اشکال تابعی است. بنابراین، هر چه آگاهی و شناخت رفتار متغیرها و انطباق دادن آنها با رفتار و مدلهای برآورد بیشتر شود، سرعت و دقت مدلسازی بیشتر می‌گردد و چه بسا که هزینه‌ها نیز کاهش در خور توجهی یابند.

از آنجا که امروزه در ایران، گرایش بالایی به استفاده از مدلهای درون‌یابی و برون‌یابی پیش‌بینی برای برنامه‌ریزی و ارزیابی فعالیتها وجود دارد، شناخت اشکال تابعی به منظور افزایش دقت و صحت ضروری است. بنابراین، انتظار می‌رود با مطالعه مقاله بتوان به سوالات زیر پاسخ داد.

۱. مدلهای خطی چه تنوعی دارند؟ و برخی از ویژگی آنها چیست؟

۲. مدلهای نهایی دارای چه اشکالی هستند؟ و چه خصوصیاتی دارند؟

۳. قدرت درون‌یابی و برون یابی مدلهای خطی و مدلهای نمایی تا چه میزان است؟

۴. در تخمین مدلهای نمایی، آنها را به چه روشهایی می‌توان خطی کرد؟ و در این تبدیل چه خصوصیاتی باید رعایت شوند؟

۵. ترکیب اشکال خطی و غیرخطی مدلها چگونه ظاهر می‌شوند؟

٦. روشهای تخمین مدلها با تنوع اشکال تابعی چیست؟

۷. زمینه‌های کاربرد مدلها با تنوعی که دارند چیست؟ و چگونه می‌توانند در تناسب با مباحث نظری برای داده‌های تجربی سودمند واقع شوند؟

۸. مطالعات و مدلهای تخمین متغیرهای بخش بازرگانی و اقتصادی ایران از چه تنوع مدلی برخوردارند و قدرت سازگاری آنها با رفتار تجربی داده‌ها چه میزان است؟

۲. شکل خطی

مدل خطی رگرسیون، پارامترهای خطی دارد اما متغیرهای آن لزوماً خطی نیستند. به هرحال، در این حالت، شکل خطی متغیرها برای مثال Y رگرسیون شده بر $X_1, X_2, \ldots, X_k$ مورد توجه قرار می‌گیرد.

$$Y = \alpha + \beta x + u$$ یک متغیره

$$Y = \alpha + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 x_3 + u$$ چند متغیره (۱)

$$Y = \alpha + \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k + u$$ چند متغیره فشرده

مدل خطی رگرسیون بر این فرض که تمام شیبها ثابت هستند، مبتنی است.

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_k} = \beta_k \qquad k = ۱،۲،....،k \tag{۲}$$

به تبع این فرض، کششها ثابت نخواهند بود و برای هر متغیری یک کششی وجود دارد.

$$E_{y,xk} = \frac{\Delta Y/Y}{\Delta x_k/x_k} = \frac{\Delta Y}{\Delta x_k} \cdot \frac{x_k}{Y} = \beta_k \frac{X_k}{Y} \tag{۳}$$

کششها معمولاً با در اختیار داشتن β_k در سطح میانگینهای مقادیر نمونه برای x_k و Y محاسبه می‌شوند.[۲]

۳. شکل نمایی

در صورتیکه مشخص شود برخلاف مدل خطی، کششها یکی هستند اما شیبها ثابت نمی‌باشند، $E_{Y,xk} = \beta k$ می‌توان از شکل نمایی با انواع ذیل استفاده کرد.

۳-۱. نمایی ساده

در این حالت، شکل تابع به صورت زیر است:

$$y = \beta 0 b^{\beta 1x} \quad b > 1 \text{ برای} \tag{۴}$$

هنگامی که x یک واحد تغییر یابد، y به اندازه β_1 تغییر خواهد یافت. در این رابطه، β_0 و β_1 پارامتر بوده و b، پایه تابع است. شکل دیگر معادله (۴) به صورت زیر است.این اشکال زمانی که x زمان است، برای رشد گسسته کاربرد ویژه دارند و برای تبیین رشد متغیر در طول زمان مورد استفاده واقع می‌شوند.

2. Clark & Schkade (1979), Blecha (1989)

$$\log y = \log \beta 0 + \beta_1 x \log b \qquad (5)$$

از دیگر اشکال توابع نمایی ساده، سه رابطه (٦) ، (٧) و (٨) می‌باشند که برای برآورد آنـها از تبدیل نیمه‌لگاریتمی استفاده می‌شود.

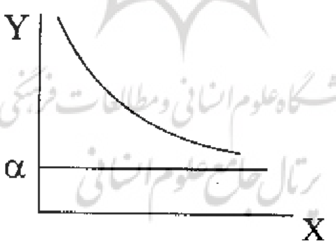
$$Y = \beta_0 - \beta_1^{x1} \beta_2^{x2} + u \qquad (6)$$

$$Y = \beta_0 + \beta x_1^{\beta 2} + u \qquad (7)$$

تنها مساله مهم در این نوع از معادلات، فن ارزیابی تفاوت معنی‌دار آماری β_2 از صفر است. در رابطه ۸، پارامتر α به عنوان مقدار هدفی طرح شده است که Y رفتار خود را با تغییر x در آن سطح جویا می‌شود.

$$Y = \alpha \beta^{\frac{1}{x}} \qquad (8)$$

نمودار ۱ ـ معادله ۸



روابط (۹) و (۱۰) تبدیلهای مضاعف لگاریتمی روابط (٦) و (٧)، و رابطه (۱۱) تبدیل نـیمه لگاریتمی[3] رابطه (۸) می‌باشند. تخمین آن اشکال بر اساس این تبدیلها صورت می‌پذیرد.

$$\log Y = \log \beta_0 + x_0 \log \beta_1 + x_2 \log \beta_2 + \log u \qquad (9)$$

3. Semilog Form

$$\log Y = \log \beta_0 + \log \beta_1 + \beta_2 \log X_1 + \log u \qquad (۱۰)$$

$$\log Y = \log \alpha + \frac{۱}{x} \log\beta \qquad (۱۱)$$

برای برآورد رابطه ۱۰، چنین عمل می‌شود:

$\log \beta = b, \log \alpha = a$ و $\log Y = y \ . \ \frac{1}{x} = x$

لذا خواهیم داشت: $y = a + bx$

۳-۲. نمایی طبیعی

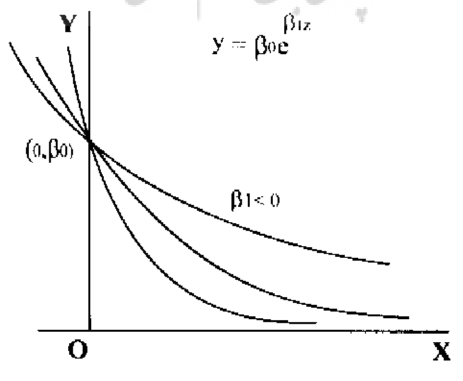
الف . پایه نپر x

در این حالت، شکل معادله به صورت زیر است.

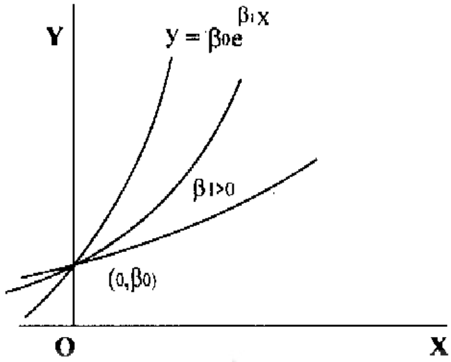
$$y_1 = \beta_0 e^{\beta_1 t \ (=x)} \qquad (۱۲)$$

شکل نمایی طبیعی، هنگامی که x زمان (t) باشد برای رشد پیوسته کاربرد ویژه دارد. t به عنوان زمان هم اندیس متغیر y و هم به عنوان متغیر است. در دو شکل زیر، دو نمونه از توابع نمایی طبیعی هنگامی که $\beta_1 > 0$ و $\beta_1 < 0$ است، نشان داده شده است.

نمودار ۲- منحنی تابع نمایی طبیعی ($\beta_1 > 0$)



نمودار ۳- منحنی تابع نمایی طبیعی ($\beta_1<0$)



از آنجاکه توابع نمایی، خطی نیستند، می‌توان با استفاده از لگاریتم آنها را تبدیل به معادلاتی نمود که با استفاده از حداقل مجذورات معمولی (OLS) برآورد می‌شوند.

$$\ln y_t = \ln \beta_0 + \beta_1 t \qquad (۱۳)$$

برآوردکننده‌های ols، برآوردهای ناریب از β_0 و $\log \beta_0$ عرضه می‌دارند. برآورد β_0 با گرفتن آنتی لگاریتم از $\log \beta_0$ به دست می‌آید. به هر حال، برآورد آنتی لگاریتم اریب داراست هر چند که $\log \beta_0$ ناریب می‌باشد.

قبل از برآورد هر تابعی، باید راجع به نحوه بروز جمله خطای تصادفی در تابع کسب اطلاع کرد. در صورتی که u جمله خطای تصادفی باشد، بروز آن را می‌توان در توابع زیر دنبال کرد.

$$y_t = \beta_0 e^{B_1 t} e^{ut} \qquad (۱۴)$$

$$y_t = \beta_0 e^{B_1 t} u_t \qquad (۱۵)$$

$$y_t = \beta_0 e^{B_1 t} + u_t \qquad (۱۶)$$

$$y_t = \beta_0 e^{\beta_1 t} + e^{ut} \qquad (۱۷)$$

به هرحال، تابع نمایی، مدل رشد پیوسته است. این رشد به طور پیوسته در طول زمان رخ می‌دهد. در صورتی که مدل در چند مقطع پیوسته نباشد، مدل رشد گسسته را نمایش می‌دهد.

$$y_t = y_0(1+i)^t \qquad (۱۸)$$

$$y_t = y_0 (1+i)^t e^{ut} \qquad (۱۹)$$

مدل پیوسته نیز کاربرد فراوان دارد. به هر حال، فرایند رشد نمایی پیوسته را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$y_t = y_0 b^t e^{ut} \qquad (۲۰)$$

در این رابطه، t اعداد صحیح بوده و $b>0$ می‌تواند توانی غیر از یک داشته باشد. از آنجاکه e عدد واقعی بزرگتر از یک است، β_1 همیشه مقداری اخذ می‌کند. $(1+i)=b=e^{\beta_1}$

به هرحال، فرایند رشد گسسته را می‌توان با استفاده از فرایند نهایی مدلسازی کرد[۴].

$$y_t = y_0(1+i)^t e^{ut} = y_0 e^{b_1 t} e^{ut} \qquad (۲۱)$$

ب. ضربی طبیعی

حالت رایج این مدل بدینصورت است که در واقع رگرسیون غیرخطی چند متغیره با عرض از مبداء و جمله اخلال نمایی طبیعی است.

$$Y = e^{\beta_0} x_1^{\beta 1} x_2^{\beta 2} e^u \qquad (۲۲)$$

برای این مدل که دورگرسور دارد، e پایه لگاریتم طبیعی است. تبدیل لگاریتمی آن که معادله را خطی می‌کند، به صورت زیر باشد.

4. Cassidy (1981), Pindyck & Rubenfeld (1990), Blecha (1989)

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + u \qquad (۲۳)$$

از آنجا که کشش به صورت $\frac{\Delta(\ln Y)}{\Delta(\ln x_k)}$ تفسیر می‌شود، برابر با β_x می‌باشد. شرط کشش ثابت، در این معادله مضاعف لگاریتمی صدق می‌کند. در این حالت، تفسیر β_1 را می‌توان چنین ارایه نمود: اگر x_1 یک درصد تغییر کند و x_2 ثابت نگه داشته شود، Y به اندازه β_1 درصد تغییر خواهد کرد. البته در این معادله شیبها به سطوح متغیرها بستگی دارند:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_k} = \beta_k \frac{x_k}{Y}$$

یا (۲۴)

$$\beta_k = [\frac{\Delta Y}{\Delta x_k}]\,[\frac{x_k}{Y}]$$

شکل خطی - لگاریتمی معادله (۲۳) معمولاً به شکل خطی به واسطه «خطای تشخیص بُعدی»[5] ترجیح داده می‌شود. در شکل خطی، یک واحد تغییر در رگرسور، همان میزان تغییر در Y را بدون توجه به سطح Y که ممکن است نامناسب باشد، ایجاد می‌کند.

در نمودار ۴، ۵ و ۶ شکل تابع نمایی یا مضاعف لگاریتمی با حذف جمله خطا نشان داده شده است. در نمودار ۴ مفهوم مادی تابع تولید یا منحنی بی‌تفاوتی نشان داده شده است. منحنیهای برابری مقادیر تولید از توابع تولید و منحنیهای بی‌تفاوتی از توابع مطلوبیت، جایگزینی بین عوامل و کالاهای X_1 و X_2 را برای تولید یا بازده سطح یکسان تولید یا مطلوبیت Y نشان می‌دهند. در نمودار ۵، تابع نهایی ساده در صورتی که X_2 ثابت در نظر گرفته شود طرح شده، در صورتی که اگر X_1 فقط رگرسور باشد، تابع چنین می‌شود[6] (وبر، ۱۳۶۵).

$$Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} \qquad (۲۵)$$

که شکل آن در نمودار (۶) ترسیم شده است. این معادله نیز پس از تبدیل لگاریتمی، پارامترهای

5. Dimensional Misspecification

6. Mc Guigan & Moyer (1981)

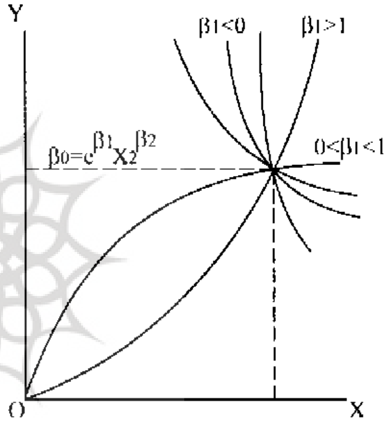
خطی خواهد داشت البته به استثنای جمله ثابت.

$$\text{Ln } Y = \text{Ln}\beta_0 + \beta_1 \ln X_1 = \beta_1 + \beta_1 \ln x_1 \qquad (۲۶)$$

نمودار ۴ـ شکل تابع نمایی

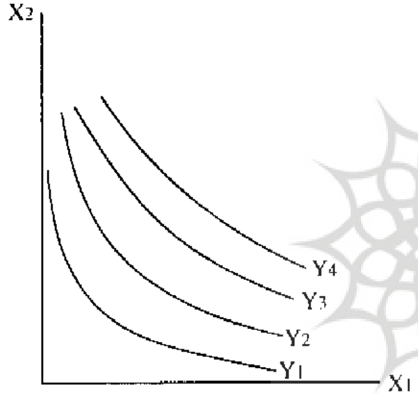
$Y = (e^{\beta_0} x_2^{\beta_2}) x_1^{\beta_1}$

$Y = \beta^*_0 x^{\beta_1}$

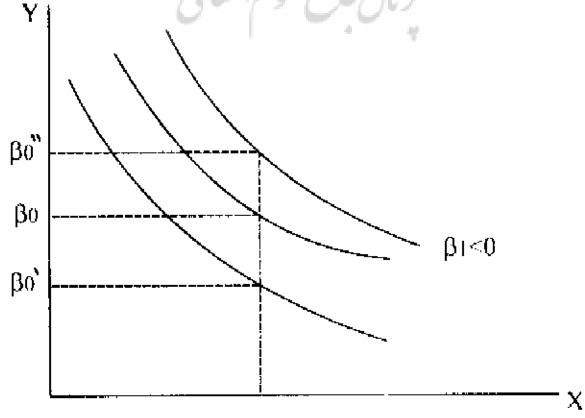


نمودار ۵ـ اشکال تابعی نمایی

$Y_i = e^{\beta_0} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2}$



نمودار ۶ـ تابع $Y = \beta^*_0 x^{\beta_1}$



۴. شکل نیمه‌لگاریتمی

معادله نیمه لگاریتمی، نمونه دیگری از اشکال غیرخطی تابع است که می‌توان با استفاده از مدل رگرسیون خطی برآورد کرد و ممکن است حاوی رگرسورهای لگاریتمی یک یا چند متغیر مستقل باشد. معادله (۲۷) نمونه‌ای از آن را نشان می‌دهد.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 X_2 + u \qquad (۲۷)$$

در این حالت، شیب معادله بدین صورت می‌شود.

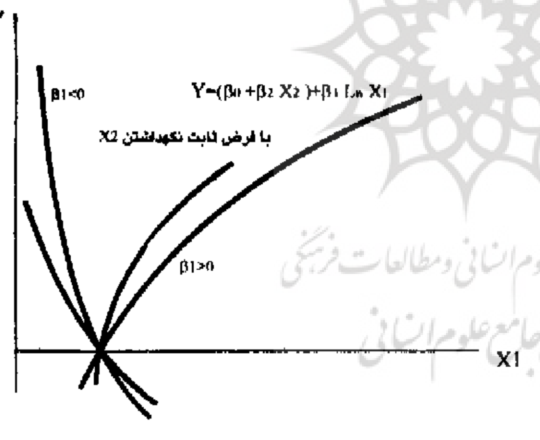
$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_1} = \frac{\beta_1}{x_1} \qquad (۲۸)$$

(x_2 ثابت فرض شده است.)

و

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_2} = \beta_2 \qquad (۲۹)$$

نمودار ۷ـ شکل نیمه‌لگاریتمی



بنابراین، اثر جزئی $x1$ بر Y هنگام افزایش x_1 مطابق شکل Y کاهش خواهد یافت. اگر X_1، یک درصد تغییر یابد، Y به میزان $\frac{\beta_1}{۱۰۰}$ واحد تغییر می‌یابد.

رابطه جزئی (با فرض ثابت نگهداشتن X_2(X_1 بر Y، خطی است. کشش Y نسبت به X_1 برابر با رابطه (۳۰) است. مطابق این رابطه، هنگام افزایش Y، آن کشش کاهش خواهد یافت.

$$E_{y,x_1} = \frac{\Delta Y}{\Delta X_1} \cdot \frac{X_1}{Y} = \beta_1 (\frac{1}{Y}) \qquad (۳۰)$$

نوع دیگر معادله نیمه لگاریتمی با اخذ لگاریتم از معادله ۲۹ بدست می‌آید.

$$Y = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u} \qquad (۳۱)$$

معادله تبدیلی آن چنین می‌شود.

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u \qquad (۳۲)$$

این مدل نه شیب ثابت دارد و نه کشش ثابت. شیب آن برابر با رابطه (۳۲) است.

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_k} = \beta_k e^{(\beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 x_2 + u)} = \beta_k Y \qquad (۳۳)$$

برای زمانی که ۲ یا ۱ $K=$ است. بنابراین، شیب در سطح بالای Y، بزرگتر است. به هرحال کشش به صورت رابطه (۳۳) می‌شود.

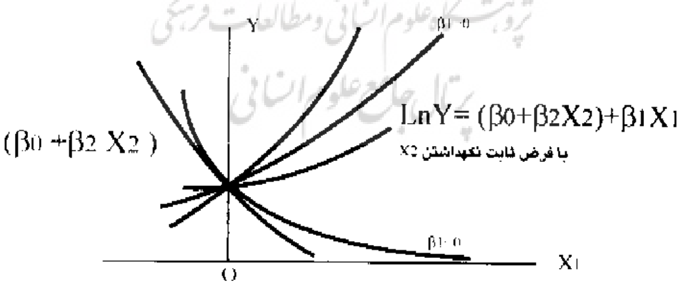
$$E_{Y,Xk} = \frac{\Delta \ln Y}{\Delta x_k / x_k} = \beta_k X_k \qquad (۳۴)$$

در صورت تغییر X_1 به میزان یک واحد، Y به میزان $100\beta_1$ درصد تغییر خواهد یافت (با فرض ثابت بودن X_2).

شکل تابع نمایی در نمودار (۸) ترسیم شده است. پیش از استفاده از این نوع تابع، باید نوع رابطه خود را مشخص کرد.

به هر حال، اشکال ساده‌تر توصیه می‌گردد، مگر آنکه تئوری اشکال پیچیده را تجویز کند.

نمودار ۸ـ معادله نمایی با تبدیل نیمه لگاریتمی در Y



۵. مولفه‌های مرتبط

شکل دیگر توابعی که شیبهای متغیر دارند، مولفه‌های متقابل یا مرتبط نامیده می‌شوند که به صورت مدل زیر می‌باشد.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 (x_1 x_2) + u \qquad (۳۵)$$

متغیر جدید x_1x_2، افزایشهایی مطابق مقادیر شیبهای ذیل ارایه می‌دهد.

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_1} = \beta_1 + \beta_3 x_2 \qquad (۳۶)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_2} = \beta_2 + \beta_3 x_1 \qquad (۳۷)$$

بنابراین، تغییر در Y نسبت به یک متغیر به سطح متغیر دیگر، وابسته است. در ارزیابی نتایج تجربی این معادله، باید برآورد β_3 را انجام داد. آنچه مهم است علایم و اندازه شیبهای مختلف (مشتقهای جزئی) در طول دامنه مربوط به مقادیر X_1 و X_2 است. هنگام ثابت بودن X_2، Y تابع خطی X_1 یعنی خط مستقم است، بنابراین نمودار آن مشخص می‌باشد.

شکل دیگری از این نوع توابع، تابع تولید متعالی است که از اشکال تعمیم یافته تولید کاب - داگلاس است.

$$Yi = \beta_1 L^{\beta 2} K^{\beta 3} e^{\beta_4 L + \beta_5 k} \qquad (۳۸)$$

Y محصول، L نهاده نیروی کار و K نهاده سرمایه است. پس از اخذ لگاریتم طبیعی و افزودن جمله اخلال تصادفی، تابع تولید متعالی زیر حاصل می‌شود.

$$Ln\ Y_i = \beta_0 + \beta_2 Ln\ L_i + \beta_3 Ln\ K_i + \beta_4 Li + \beta_5 K_i + u_i \qquad (۳۹)$$

$\beta_0 = Ln\ \beta_1$ می‌باشد.

در شکل نمایی X، این نوع تابع متعالی چنین نوشته می‌شود.

$$Yi = \beta_1 x_1^{\beta 2} X_2^{\beta 3} e^{\beta 4 x1 + \beta 5 x2} \qquad (۳۹)$$

شکل سوم جملات مرتبط که از دیگر اشکال تابع تولید متعالی ست به شکل زیر است.

$$LnY = \beta_0 + \beta_1 Ln\ X_1 + \beta_2 Ln\ x_2 + \beta_3 (Lnx_1)^2 + \beta_4 (Ln\ X_2)^2 + \beta_5 (LnX_1)(Ln\ X_2) \qquad (۴۱)$$

یا

$$LnY = \beta_0 + \beta_1 Ln\ x_1 + \beta_2 Ln\ x_2 + \beta_3 (Ln\ x_1)(Ln\ x_2) \qquad (۴۲)$$

یا

$$Ln\ Y = \beta_0 + \beta_1 Lnx_1 + \beta_2 Lnx_2 + \beta_3 (Ln\ x_1)^2 + \beta_4 (Lnx_1)(Lnx_2) \qquad (۴۳)$$

از این اشکال تابعی برای برآورد تابع تولید استفاده می‌شود. تابع تولید لگاریتمی متعالی حاوی مؤلفه‌های خطی و درجه دومی از لگاریتم نپر و تعدادی دلخواه از عاملهای تولید است. این تابع در حالت خاص، تبدیل به تابع تولید «کاب - داگلاس چند متغیره» می‌شود. در تابع تولید لگاریتمی متعالی، پیش فرضی در مورد بازده نسبت به مقیاس و نرخ نهایی جانشین فنی وجود ندارد و در هر دوره زمانی، کششهای تولیدی عوامل تولید، نرخ نهایی جانشینی فنی و بازده نسبت به مقیاس محاسبه می‌شوند[7] (گجراتی، ۱۳۷۲).

مقایسه و مطالعه این اشکال تابعی با سایر اشکال، به ویژه در جدول (۱) می‌تواند بصیرت استفاده از مدلهای مختلف را هنگام برآورد روابط میان متغیرها، افزایش در خورتوجهی دهد، با این توجه که مدلهای برآوردی مورد ایران برای بیشتر آنها ارایه نشده است.

۶. چند جمله‌ایها[8]

زمانی از گزاره‌های چند جمله‌ای استفاده به عمل می‌آید که انتظار رود شیبها به سطح خود متغیر، وابسته هستند. شکل کلی معادله چند جمله‌ای به صورت زیر است.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 \dots + \beta_n x^n \qquad (۴۴)$$

نمای صحیح n، اشاره به بالاترین توان x در تابع چند جمله‌ای می‌کند. توابع چند جمله‌ای بر اساس n طبقه‌بندی می‌شوند. پارامترهای این نوع توابع عموماً خطی هستند. برخی از اشکال این توابع در حالات مختلف به شرح زیر هستند.

۱. تابع چندجمله‌ای درجه صفر یا مقدار ثابت $n = 0 : y = \beta_0$

۲. تابع خطی یا چند جمله‌ای درجه یک $n = 1 : y = \beta_0 + \beta_1 x$

۳. تابع مربع یا چندجمله‌ای درجه دوم $n = 2 ; y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

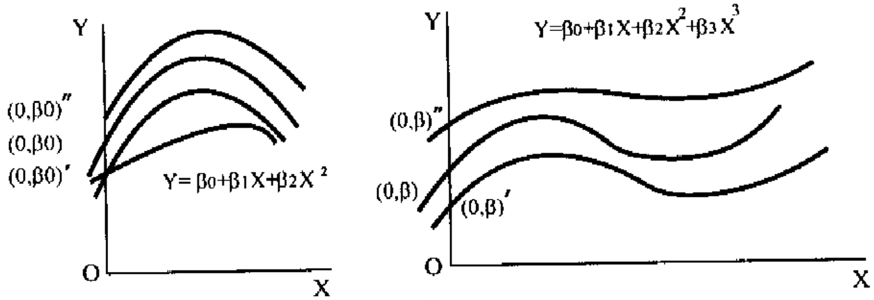
۴. تابع مکعب یا چند جمله‌ای درجه سوم $n = 3 : y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3$

7. Coulcutt (1991), Young & Hamburg (1994), Eatwell (1990)

8. Polynomial Functions

نمودار ۹- اشکال چندجمله‌ای

ب. چند جمله‌ای درجه سوم | **الف . چندجمله‌ای درجه دوم**



برای برآورد این نوع توابع، از ols با تبدیل آن توابع می‌توان استفاده کرد. برای مثال، اگر تابع چندجمله‌ای درجه سوم را درنظر گیریم و در آن $z = x^2$ و $w = x^3$ را جایگزین کنیم: خواهیم داشت.

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 z + \beta_3 w \qquad (۴۵)$$

به هرحال، تابع چندجمله‌ای درجه سوم، ساده‌ترین تابع چندجمله‌ای است که برای مدل هزینه کل بنگاههای اقتصادی می‌توان در نظر گرفت. با در نظر گرفتن Q به عنوان تولید و Tc به عنوان هزینه کل، چند جمله‌ای درجه سوم چنین می‌شود.

$$Tc = \beta_0 + \beta_1 Q + \beta_2 Q^2 + \beta_3 Q^3 \qquad (۴۶)$$

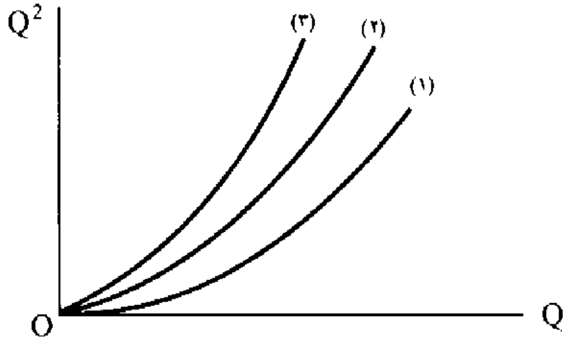
در نمودار (۱۰) رابطه بین Q و Q^2 که غیرخطی است، نشان داده شده است.

شکل دیگری از چندجمله‌ای درجه دوم به صورت رابطه (۴۶) است. در این معادله شیب در نقطه X_1 تابعی از X_1 است.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1{}^2 + \beta_3 x_2 + u \qquad (۴۶)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_2} = \beta_3 \quad \text{و} \quad \frac{\Delta Y}{\Delta x_1} = \beta_1 + ۲\beta_2 x_1 \qquad \text{(۴۷) شیبها}$$

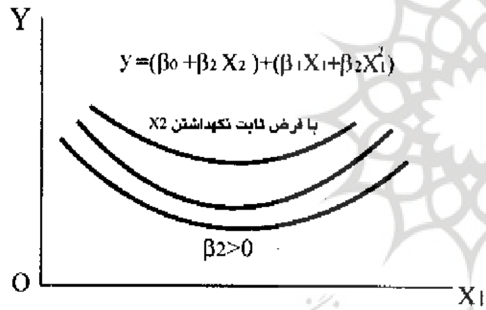
نمودار ۱۰ـ ارتباط غیرخطی بین Q و Q^2



بنابراین، اولین شیب به سطح X_1 وابسته است.

اگر تابع، تابع هزینه در نظر گرفته شود، Y هزینه متوسط تولید و X_1 سطح تولید شرکت را نشان خواهد داد. برای کسب اطمینان از U شکل شدن منحنی هزینه، β_2 باید مثبت باشد.

نمودار ۱۱ـ منحنی تابع درجه دوم با $\beta_2>0$



به هر حال، چند جمله‌ای یکی از شیوه‌های برازش منحنیها می‌باشد. با در اختیار داشتن n مشاهده، منحنی رگرسیون را می‌توان برای چند جمله‌ای با n-1 درجه آزادی یعنی داشتن $x_1 , x^2_1 , x^3_1 , \ldots x_1^{n-1}$ رگرسور، برازش نمود. گفتنی است که این رابطه رگرسیون، یک رابطه آماری نبوده، بلکه رابطه ریاضی است. برای تعیین مدل و نتایج رگرسیون جهت استنباطهای آماری، راجع به روابط علّی میان متغیرها، باید از نظریه‌های علمی مربوط به اقتصاد، بازرگانی، مالی، مدیریت، حسابداری استفاده کرد و فقط اینطور نباشد که به داده‌های مشهود، منحنی برازانده شود. بنابراین، در تحلیل رگرسیون باید از استفاده از درجه‌های بالاتر چند جمله‌ایها امتناع شود. ضمناً با رگرسورهای چند جمله‌ای، تفسیر ضرایب انفرادی رگرسیون مشکل می‌شود و معادله برای دامنه‌های خاص X_1 مثبت، سپس منفی و بعد مثبت می‌گردد. البته چنین وضعیتی ممکن است مبنای نظری نداشته باشد و صرفاً تناسب مدل را با داده‌های واقعی که نوسانات آنگونه‌ای دارد، نشان دهد. البته باید توجه نمود که هر نوع عاملی که موجب بروز تغییر در داده‌های سری زمانی واقعی شده است، زمانی که مدل برازانده

شد، مبنای تئوری آن نوسانات در داده‌های برازش شد، مصداق پیدا می‌کند.[۹]

۷. شکل معکوس

از دیگر اشکال رایج شکل تابعی، شکل معکوس نسبت به X_1 است. یک نوع از این معادله در رابطه زیر نشان داده شده است.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{x_1}\right) + \beta_2 x_2 + u \qquad (۴۹)$$

شیبهای معادله به صورت زیر هستند.

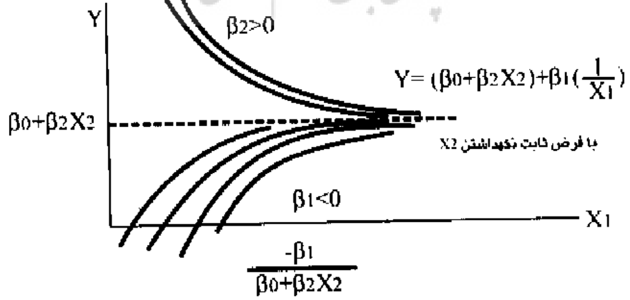
$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_1} = -\beta_1 \left(\frac{1}{{x_1}^2}\right) = \frac{-\beta_1}{{x_1}^2}$$

(۵۰)

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_2} = \beta_2$$

زمانی که $\beta_1 > 0$ است، شیب نسبت به x_1 منفی است و مقدار قدر مطلق آن کاهش می‌یابد و با افزایش x_1 به سمت صفر میل می‌کند. بنابراین، رابطه جزیی بین x_1 و y با فرض ثابت نگه داشتن x_2، هنگام افزایش x_1 با حذف جمله پس‌ماند به $\beta_0 + \beta_2 x_2$ میل می‌کند. مطابق شکل، اگر β_1 منفی باشد، رابطه جزیی محور x_1 را در مقدار $\frac{-\beta_1}{\beta_0+\beta_2 x_2}$ قطع می‌کند و شیب آن به سوی همان خط افقی زمانی که $\beta_1 < ۰$ است، میل می‌کند.

نمودار ۱۲ـ اشکال توابعی معکوس



9 . Mc Guigan & Moyer (1989), Clark & schkade (1979), Cassidy (1981)

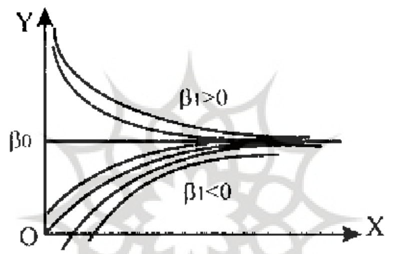
شکل ساده‌تر معادله معکوس به صورت زیر است که با در نظر گرفتن $x=\frac{1}{z}$، تبدیل به رگرسیون یک متغیره شده به سادگی با استفاده از روش ols قابل برآورد است.

$$Y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{z}\right) \qquad (۵۱)$$

اگر $\frac{1}{z} = x \Rightarrow Y = \beta_0 + \beta_1 x \quad , \beta_1 > 0$ و یا $\beta_1 < 0$

نمودار این تابع به این صورت است.[۱۰]

نمودار ۱۳ـ نمونه‌ای از تبدیل معکوس



۸. *ترکیبات اشکال تابعی*

ترکیبات متعددی می‌توان از اشکال تابعی به وجود آورد، همان گونه که در حالات پیشین بحث شد شکل متخذه X_1 ممکن است از شکل متخذه x_2 تفاوت نماید. به همین صورت Y می‌تواند شکل تابعی متفاوتی داشته باشد. به هرحال، باید معادله‌ای در نظر گرفت که نظریه، بهترین وضعیت و رفتار را برای آن تعیین می‌کند. در صورتی که نتوان از نظریه، راجع به علامت مشتق مرتبه دوم (نرخ تغییر شیب) یا راجع به مجانبها چیزی فهمید، اشکال تابعی مرکب را باید به عنوان تدبیر برازش منحنی در نظر گرفت و لازم است از توسل به شیوه‌های دیگر اجتناب ورزید. به علاوه ، مبنای تئوریکی هر شکل تابعی برخواسته از نظریه‌ها یا فرضیه‌های علمی است لذا هنگام ارایه پیش بینی رگرسیون باید

10. Mc Guigan & Moyer(1989), Blecha(1989)

به‌طور مستدل طرح شوند.

یک نوع از اشکال ترکیبی، شکل لگاریتمی - معکوس است.

$$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \left(\frac{1}{x_1}\right) + \beta_2 x_2 + u \qquad (۵۲)$$

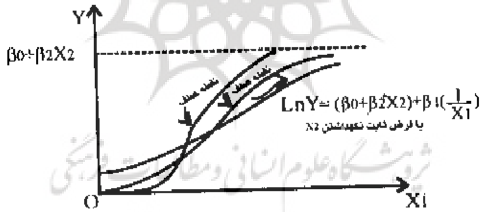
شیبهای این تابع بدین صورت هستند:

$$\frac{\Delta Y}{\Delta x_1} = \frac{-\beta_1}{x_1^2} Y \qquad (۵۳)$$

$$\frac{\Delta Y}{\Delta X_2} = \beta_2 Y$$

در برخی مباحث تئوریک، ارتباط جزئی بین Y و X_1 با علامت منفی کاربرد خاصی دارد. مطابق نمودار (۱۴)، منحنی از مبداء آغاز شده و با نرخ افزایشی، افزایش می‌یابد، سپس به نقطه عطف می‌رسد و بعد از آن با نرخ کاهشی افزایش می‌یابد، آنگاه به سوی حد مجانبی میل می‌کند. این نوع منحنیها بیشتر در مبحث منحنیهای فراگیری یا عرضه محصولی جدید در بازار، مورد استفاده قرار می‌گیرند.[11]

نمودار ۱۴ـ منحنی لگاریتمی - معکوس



۹. شکل تابعی لوژستیک[12]

به هر حال، کلیه توابع را نمی‌توان با استفاده از تبدیل - که پارامترهای آن غیرخطی هستند - برآورد کرد. تابع لوژستیک چنین وضعیتی دارد. شکل تابعی لوژستیک به صورت رابطه زیر است.

$$Y = \frac{\beta_0}{1 + \beta_2 e^{-\beta_1 x}} \qquad (۵۴)$$

11. Pindyck & Rubenfeld (1991), Blecha (1989)

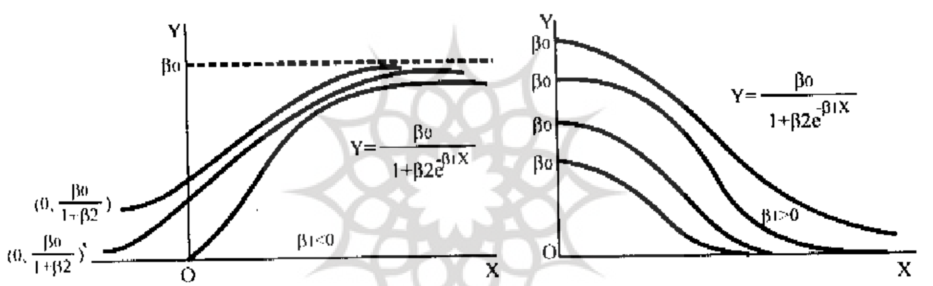
12. Logistic Functional Form

در این رابطه β_0 ، β_1 و β_2 پارامترهای تابع هستند.

با بزرگ شدن x ، تابع به سوی مقدار β_0 میل می‌کند. در نمودار (۱۵)، اشکال تابع لوژستیک نشان داده شده است. از این تابع اغلب برای مدلسازی فرایندهای رشد استفاده می‌شود که در آن نرخ تغییر تابع نسبت به زمان، در تناسب با سطح جاری متغیر، و تفاوت سطح جاری از سطح اشباع فرض می‌شود. سطح اشباع به عنوان مقدار هدف یا بهینه نیز مطرح می‌شود.

نمودار ۱۵ـ اشکال تابع لوژستیک

ب .　　　　　　　　　　　　　　　　الف .



در نمودار (۱۵ - الف) هنگامی که Y شروع به افزایش می‌کند، اندازه متغیر کوچک می‌شود و فاصله تا سطح اشباع زیاد است. مطابق فرمولهای منحنی لوژستیک، فاصله تا سطح اشباع علت اصلی افزایش Y به آن سطح است. اما در نقطه‌ای که برابر با $\beta_0/۲$ روی محور Y نشان داده می‌شود فاصله تا سطح اشباع به گونه‌ای می‌شود که نرخ رشد پیوسته با افزایش Y بسوی β_0 کاهش می‌یابد. از این توابع برای تبیین سهم بازار محصول جدید، سطح پذیرش نوآوری فنی، رشد درآمد حرفه‌ای در طول عمر شخص، رشد منابع تجدیدپذیر استفاده فراوان می‌شود.

تابع لوژستیک را نمی‌توان با تبدیل به معادله‌ای خطی در پارامترها تبدیل کرد. تابع معکوس لگاریتمی که هم به شکل تابع لوژستیک و هم در پارامترها خطی است، اغلب به جای تابع لوژستیک بر آورد می‌گردد.

$$Y = e^{\beta_0 - \beta_1/x}$$

اگر $w = \frac{1}{x}$ باشد، می‌توان نوشت:

(۵۵)

$$Y = e^{\beta_0 - \beta_1 w}$$

$$LnY = \beta_0 - \beta_1 w$$

حال، این معادله با استفاده از ols قابل برآورد است.[۱۳] به هر حال در جدول (۱)، انواع اشکال تابعی معادلات به اجمال عرضه شده است.

۱۰. کاربرد مدلهای ریاضی

در این قسمت ضمن طرح کلی مدلها، برخی از نمونه‌های مدلهای برآوردی ایران که تناسب با مدلهای ریاضی مباحث قبلی مقاله دارند، معرفی می‌شوند. در قسمت قبل، ضمن طرح دامنه گسترده انواع مدلهای ریاضی برای برآورد متغیرهای بخش بازرگانی و اقتصاد، ویژگیها و رفتار ساختاری هر یک از آنها تشریح شدند. در واقع، با آشنایی با تنوع مدلها، چشم‌اندازی از روش‌شناسی ریاضی مدلسازی فراهم شد تا محققان بتوانند پس از مشاهده نمودار داده‌های سری زمانی متغیرهای تحت مطالعه، تشخیص دهند کدامیک از مدلهای ریاضی می‌توانند تبیین کننده رفتار متغیرها باشند. ممارست در این مرحله آنچنان حایز اهمیت فراوان در مدلسازی است که محقق را از بعد نظری قادر به انتخاب مناسب مدل می‌سازد. در واقع هر چه قوه ادراک، شناسایی و تشخیص در این مرحله تقویت شود و از تجارب لازم بهره‌مند گردد، از اتلاف وقت، انرژی و هزینه صرفه‌جویی می‌شود و موجب سرعت بخشیدن کار مدلسازی، تخمین مدلها و برآورد متغیرها می‌گردد.

یکی از مشکلات عدیده‌ای که گاه محققان با آن رو برو می‌شوند، در اختیار نداشتن زمینه گسترده روش‌شناسی اشکال تابعی مدلهای ریاضی است. از این رو، مدلها را از حوزه محدودی انتخاب می‌کنند. این کار موجب فاصله گرفتن از دقت و صحت مورد انتظار از مدلهای تخمین می‌شود، و بعضی مواقع حتی منجر به معنی‌دار تشخیص ندادن روابط میان متغیرهای تحت مطالعه می‌شود. بنابراین، مطالعه مباحث قبلی مقاله و تأمل در آن و بهره‌برداری از آنها می‌تواند راهنمای سودمندی برای شناسایی و انتخاب مدلهای ریاضی برآورد متغیرها بشمار آید.

13. Eatwell (1990), Bleeha (1989)

در این مبحث، با مطالعه مدلهای برآورد ایران برای سالهای ۱۳۷۶ - ۱۳۵۱ نمونه‌هایی انتخاب و در جدول (۱) ارایه می‌شوند. این نمونه‌ها شامل اشکال تابعی مدلهای ریاضی متغیرهای تخمین زده هستند و همخوانی با برخی مدلهای ریاضی دارند که در مباحث قبلی مقاله راجع به آنها بحث گردید. با نگرش به این مدلها و با بررسی و مطالعه‌ای که انجام گرفته است، می‌توان نتایج زیر را ارایه نمود.

۱. مدلهای برآورد ایران در سالهای اولیه دهه ۱۳۵۰ و حتی اوایل دهه ۱۳۶۰ مدلهای ساده و عموماً یک یا دو متغیره هستند.

۲. هر چه به سالهای ۱۳۷۶ نزدیک‌تر می‌شویم، مدلهای برآورد شده از اشکال دقیقتر و متنوع‌تری بهره‌مند شده‌اند.

۳. مدلهای ریاضی تخمین متغیرهای بخشهای کشاورزی، صنعتی و بازرگانی ایران به علت نوپا بودن از تنوع وسیعی بهره‌مند نیستند.

در خاتمه مقاله، چهار مدل بشرح زیر تخمین زده شده است که در مورد نرخ رسمی ارز و صادرات نفتی کشور، پیش‌بینی آنها تا سال ۱۴۰۰ نیز عرضه شده است. مدلها به ترتیب عبارتند از:

۱۰-۱. مدل غیرخطی رشد اقتصادی و تحقیقات

$$Y = f(L,K,R)=\alpha\ L^{\beta}\ K^{\alpha}\ R^{r} \qquad (1)$$

از این مدل، نسبت به متغیرها مشتق جزئی گرفته شد، و با تشکیل دیفرانسیل هر یک از متغیرها، تابع غیرخطی رشد اقتصادی به صورت زیر به مدل نرخ رشد متغیرها تبدیل شد.

$$\frac{\partial Y}{\partial L} = \beta(\frac{Y}{L})\ ,\ \frac{\partial Y}{Y} = \beta(\frac{\partial L}{L})$$

$$\beta = \frac{\partial Y\backslash Y}{\partial L\backslash L}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = \alpha(\frac{Y}{K}) = \frac{Y}{Y}\ ,\ \frac{\partial Y}{Y} = \alpha(\frac{\partial K}{Y})\ \rightarrow \alpha = \frac{\partial Y}{\partial k}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial K} = r(\frac{Y}{R}) = \frac{Y}{Y}\ ,\ \frac{\partial Y}{Y} = r(\frac{\partial K}{Y})\ \rightarrow r = \frac{\partial Y}{\partial k}$$

حال با جایگزینی دیفرانسیلهای حاصل در معادله (۱)، مدل خطی بر اساس نرخ رشد متغیرها

به‌دست می‌آید و این مدل برای داده‌های واقعی متغیرهای مورد مطالعه در سالهای ۱۳۷۲ ، ۱۳۶۱ برازش شد.

$$\mathring{Y}_t = \alpha + \beta\mathring{L}_t + \alpha\,\mathring{K}_t + r\mathring{R}_t + u \qquad (۲)$$

ضریب تعیین مدل $R^2 = ۰/۵۵$ است. در این مدل، تاثیر K و R بر رشد اقتصادی در سطح ۵٪ معنی‌دار نشد اما ضریب L بر رشد اقتصادی معنی‌دار شناخته شد. آزمون نیکویی برازندگی مدل در سطح ۱۰٪ معنی‌دار است. به هرحال، مطابق این مطالعه، در طول سالهای مورد مطالعه، K و R نقش چندانی بر رشد اقتصادی ایفا ننموده‌اند.

۱۰-۲. *مدل خطی رشد اقتصادی و تحقیقات*

مدل غیرخطی رابطه (۱)، با در نظر گرفتن مقادیر واقعی متغیرها به صورت مدل خطی رابطه (۲) تنظیم و برای همان سالها برازش شده است. ضریب تعیین این مدل $R^2 = ۰/۹۵۶$ است و آزمون نیکویی برازندگی آن کاملاً معنی‌دار است. البته، در این مدل تأثیر R و L بر رشد اقتصادی در سطح ۵ درصد معنی‌دار نمی‌باشد. در حالیکه K در سطح ۵٪ معنی‌دار شناخته شد.

$$Y_t = \alpha + \beta L_t + \alpha K_t + r R_t + u \qquad (۳)$$

۱۰-۳. *صادرات نفتی کشور*

صادارت نفتی کل کشور در چارچوب مدل چندجمله‌ای سری زمانی مرتبه هفتم بر اساس داده‌های سالهای ۷۴-۱۳۳۸ به صورت زیر برازش شد.

$$Xo = \beta_0 + \beta_1 T + \beta_2 T^2 + \beta_3 T^3 + \beta_4 T^4 + \beta_5 T^5 + \beta_6 T^6 + \beta_7 T^7 \qquad (۴)$$

تمام متغیرهای مستقل این مدل که زمان (T) هستند صددرصد معنی‌دار هستند و آزمون F ین مدل نیز صددرصد مدل را تائید می‌کند. با استفاده از این مدل صادرات نفتی کشور برای سالهای ۱۴۰۰-۱۳۷۵ برآورد شد.

۱۰-۴. نرخ رسمی ارز (دلار)

هر چند نرخ ارز در طول سالهای ۱۳۷۱-۱۳۳۸ تقریباً ثابت بود و در دامنه ۷۰ ریال نوسان داشت، اما از سال ۱۳۷۲ نرخ رسمی از جهشی چند برابر برخوردار شد و از ۶۵/۷۳ ریال در سال ۱۳۷۱ به ۱۶۴۶/۲۹ در سال ۱۳۷۲ رسید و این روند به آرامی سیر صعودی پیدا کرد. یافتن مدل ریاضی مناسب برای برازش این داده‌ها، ما را به مدل سری زمانی رابطه (۵) هدایت نمود.

$$EX = \beta_1 Z + \beta_2 X + \beta_3 T + \beta_4 T^2 + \beta_5 T^4 \qquad (۵)$$

در این رابطه، $Z = \frac{1}{T}$, X متغیر مجازی است.

$$X = \begin{cases} ۱ & \text{برای سالهای ۱۴۰۰-۱۳۷۴} \\ ۰ & \text{برای سایر سالها} \end{cases}$$

ضریب تعیین این مدل $R^2 =$ ۰/۹۹۸۷ است و کلیه ضرایب و آزمون نیکویی برازندگی آن کاملاً معنی‌دار هستند. آخرین نموداری که در مقاله ارایه شده است، مقادیر پیش‌بینی نرخ رسمی ارز (دلار) را برای سالهای ۱۴۰۰-۱۳۷۵ ارایه می‌دهد. مطابق این الگو، نرخ ارز سالانه با سیر صعودی مواجه می‌گردد.

البته نباید در مورد دو مدل (۴) و (۵) از این نکته غفلت نمود که هر چه بر سالهای پیش‌بینی افزوده می‌شود از دقت پیش‌بینی کاسته می‌شود، لیکن این کار صرفاً می‌تواند یک چشم انداز از وضعیت بسیار احتمالی آینده به دست دهد.

جدول ۱ـ اشکال تابعی و تبدیلی و مواد تخمین شده برای ایران

نوع مدل	شکل تابعی	شکل تبدیلی	مورد ایران
خطی	$Y = \alpha + \beta x + u$		واردات کالاهای واسطه‌ای MI = -۱/۹۰۳،۲/۵۵۲MK
	$Y = \alpha + \Sigma \beta_k X_{k+u}$		(شهشهانی ۵۵) n= ۱۵، (۱۳۳۸-۱۳۵۲)
			مصرف خصوصی جامعه شهری
			CU= ۳۰/۲۷،۰/۲۴۶MS +۰/۰۱۶ NUA+۰/۵۱۱CU$_{-1}$-۴۳۶/۶۱D
			(صفایی، ۱۳۶۵) n = ۲۴، (۱۳۳۸ - ۱۳۶۱)
			رشد اقتصادی Y = ۲۳۰۰/۶۸، ۰/۲۱L، ۲۲K، ۲/۲۵R
نمایی ساده	$Y = \beta_0 b^{\beta_1 x}$	$\log Y = \log \beta_0 + \beta_1 x \log b$	(حمیدی زاده ۷۴) n = ۱۲، (۱۳۶۱ - ۱۳۷۲)
	$Y = \beta_0 \beta_1^{x_1} \beta_2^{x_2} + u$	$\log Y = \log\beta_0 + x_1 \log \beta_1 +$	
	$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1^{\beta_2} + u$	$x_2 \log\beta_2 + \log u$	II = -۰/۰۲۰،۰/۸۵VI + ۰/۱۴ZHAP + ۰/۲۲PGNP + ۷۱۸۶OR$_{-1}$-۰/۱۷KI$_{-1}$
	$Y = \alpha \beta^{1/x}$		سرمایه‌گذاری بخش صنایع و معادن
نمایی طبیعی	$Y_t = \beta_0 e^{\beta_1 t}$		(وزارت اقتصاد و امور دارایی، ۷۳) n = ۲۹،(۱۳۳۸-۱۳۶۶)
پایه نپر	$Y_t = \beta_0 e^{\beta_1 t} e^{ut} = Y_0(1+i)^t e^{ut}$	$\log Y = \log \beta_0 + \mathrm{Log}\, \beta_1 +$	
		$\beta_2 \log x_1 + \log u$	ریسک و پرتفوی
	$Y_t = \beta_0 e^{\beta_1} U_t$	$\log Y = \log \alpha + \frac{1}{x} \log \beta$	(نعمتی، ۱۳۷۶) y = ۶/۵۴۶(۱۱/۱۶۹)$^{\frac{1}{x}}$
		$y = a + bx$	n = ۱۰
		$\mathrm{Ln}\, Y_t = \mathrm{Ln}\, \beta_0 + \beta_1 t$	
		$\mathrm{Ln}\, Y_t = \mathrm{Ln}\beta_0 + \beta_1 t + ut$	
	$Y_t = \beta_0 e^{\beta_1 t} ut$	$\log Y_t = \mathrm{Log}\beta_0 + B_1 t + \log eu$	واردات کل LM = -۷/۰۴۴، ۱/۵۸۷۶۲ LG NP -۰/۱۰۴۵۶LE
	$Y_t = \beta_0 e^{\beta_1 t} + e\, ut$	$\mathrm{Ln}\, Y_t = \mathrm{Ln}\, \beta_0 + \beta_1 t + \mathrm{Ln} u_t$	(حمیدی زاده، ۷۶) n = ۳۴،(۱۳۳۸-۱۳۷۱)
	$Y_t = \beta_0^{\beta_1} e^{t} + e^{ut}$	$\mathrm{Ln}\, Y_t = \mathrm{Ln}\beta_0 + \beta_1 t + u_t$	MUM = e1.7495 (Vi + VM)$^{۰/۹۰۲۵}$ - ۱۲۴D$_1$ ۱۰۱D$_2$
			واردات واسطه‌ای بخش صنایع و معادن (ثابت ریالی)
	$Y_t = Y_0 (1+i)^t$	$\log Y_t = \log Y_0 + t \log (1+i)$	(سازمان برنامه و بودجه، ۶۷) n = ۲۷، ۱۳۳۸-۱۳۶۴
	$Y_t = Y_0 (1+i)^t e^{ut}$	$\mathrm{Ln}\, Y_t = \mathrm{Ln} Y_0 + t\mathrm{Ln}(1+i) + u_t$	
	$Y_t = Y_0 b^t e^{ut}$	$\mathrm{Ln}\, Y_t = \mathrm{Ln}\, Y_0 + t\mathrm{Ln} b + u_t$	

ادامه جدول ۱

نوع مدل	شکل تابعی	شکل تبدیلی	مورد ایران
ضربی طبیعی	$Y_t = e^{\beta_0} x^{\beta_1}$ $Y = e^{\beta_0} x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} e^u$ $Y = (e^{\beta_0} x_2^{\beta_2}) x_1^{\beta_1}$ $Y = \beta_0 x_1^{\beta_1}$	$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$ $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + u$ $e^{\beta_0} x_2^{\beta_2} = \beta^*_0 , \ln \beta_0 = \beta^*_1$ مضاعف لگاریتمی $\ln Y = \text{Ln}\, \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 = \beta^*_1 + \beta_1 \ln x_1$	سرمایه گذاری صنایع سرمایه‌ای و واسطه (ثابت) (سازمان برنامه و بودجه، ٦٧) $IIK = IIK_{-1}^{۰/۵۲۳۴} VIK^{۰/۳۷۰۷} e^{(-۰/۵۷D)_1 - ۰/۲۷D)_2}$ $n = ۲۷ , (۱۳۳۸ - ۱۳٦۴)$ شاخص قیمت تولید $pp = M_c^{۱/۰۱۹} GDP^{(-۰/۷۰۱۱)} e^{۳/۹۸ - ۰/۰۷۵T - ۰/۰۷D_1 - ۰/۰۷}$ (سازمان برنامه و بودجه، ٦٧) صادرات تولیدات سنتی و غیرنفتی $\ln X NOT = -۳/۷ + ۱/۴۱۹ \ln YNOT - ۰/۳۵۴ \ln PXNC$ (آپادانا، ۵۷)
شکل نیمه لگاریتمی	$Y = \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 x_2 + u$ $Y = e^{\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u}$	$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + u$	صادرات کالاهای صنعتی $\ln XIN = -۲/٦۹۵ - ۱/٦٦۹p\, X NO + ۰/۳۵۰۹ \ln YIN$ (آپادانا ۵۷) $n = ۱۷ , (۱۳۳۸ - ۱۳۵۴)$ تولید بخش کشاورزی $\text{Ln}\, VA = ۰/۰۴ + ۱/۸۵ \ln LA + ۰/۹٦ \ln KA$ تولید بخش صنایع و معادن $\text{Ln}\, VI = ۰/۱۷ + ۱/۸۵ \ln LI + ۰/٦۹ \ln KI$ (وزارت اقتصاد و امور دارایی، ۷۵) $n = ۱۳$
جملات مرتبط متعالی	$Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \beta_3 (x_1 x_2) + u$ $Y = B_1 x_1^{\beta_2} x_2^{\beta_3} e^{\beta_4 x_1 + \beta_5 x_2}$ $Y = \beta_1 x_1^{\beta_2} x_2^{\beta_3} e^{\beta_4 x_1 + \beta_5 x_2}$ $\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + \beta_3 (\ln x_1)^۲ + \beta_4 (\ln x_2)^۲ + \beta_5 \ln x_1 \ln x_2$ $\ln Y \beta_0 + \beta_0 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + \beta_3 \ln x_1 \ln x_2$	$\ln Y = \beta_1 + \beta_2 \ln x_1 + \beta_3 \ln x_2 + \beta_4 x_1 + \beta_5 x_2 + u$	تولید بخش کشاورزی $\ln AV = ۱۹۹/۷۳ - ۳۴/۹۹ \ln AL - ۳۱/٦۵ \ln AK + ۴/۰۳ (\ln AL)(\ln KA)$ $\ln VI = ۸۹/۰۵ - ۳۱/۸ \ln LI + ۱۰/۰۹ \ln kI + ۲/٦۳ (\ln LI)^۲ - ۱/۳۱ (\ln LI)(\ln KI)$ تولید بخش صنایع و معادن (وزارت اقتصاد و امور دارایی، ۷۳) $n = ۲۹, (۱۳۳۸ - ۱۳٦٦)$ $\ln (\frac{M}{p_t})_t = ۴/۲٦ + ۰/٦۳ \ln(\frac{G}{P})_t + ۰/۸۹ \ln(\frac{c}{p})_t - ۰/۸۳ \ln (\frac{pt}{pN})_{t-1}$ واردات قیمتهای داخلی $\ln p_t = ۰/۰۱ + ۰/۵۳ \ln PN_t + ۰/۵٦ \ln PT_t$ (آق اولی و ساساپور، ٦۱) $n = ۱۸ , (۱۳۳۹ - ۱۳۵٦)$

ادامه جدول ۱

نوع مدل	شکل تابعی	شکل تبدیلی	مورد ایران
چند حمله‌ای	$\ln Y = \beta_0 + \beta_1 \ln x_1 + \beta_2 \ln x_2 + \beta_3 (\ln x_1)^2 + \beta_4 (\ln x_1)(\ln x_2)$ $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2 + \beta_3 x^3 + \dots + \beta_n x^n$ $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_2 + u$ $Y = \beta_0 X_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} + u$ $Y = \beta_0 \beta_1^{X_1} x_2^{\beta_2} + u$ $Y = \beta_0 + \beta_1 x_1^{\beta_2} + u$ $Y = \beta_0 + \beta_1 (\frac{1}{x_1}) + \beta_2 x_2 + u$ $Y = \beta_0 + \beta_1 (\frac{1}{x_1})$	$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 z + \beta_3 w$ برای $x^2 = z$ ، $x^3 = w$ $Y = \beta_0 + \beta_1 x$ برای $\frac{1}{x_1} = x$	شاخص قیمت خرده فروشی PH = e^(۰/۰۵۵۷) PH₋₁^(۰/۸۳۶۷۹) PP^(۰/۱۷۸۵۱) + ۱۶D₁ + ۵۶D₂ n = ۲۷ ، (۱۳۳۸ - ۱۳۶۴) (سازمان برنامه و بودجه، ۶۷) نرخ رشد اقتصادی Y˙ = ۴۴/۳۹۵-۶/۹L˙ - ۷۸/۱۸K˙ - ۲۲/۱۱R˙ + u n = ۱۲ ، (۱۳۶۱-۱۳۷۲) (حمیدی‌زاده، ۱۳۷۴) صادرات نفتی Xo = ۱۵۶۰/۴۱۹T - ۰/۶۴۷/۳۰۳۵۲T² + ۱۱۳/۷۱T³ - ۹/۰۹۹T⁴ + ۰/۳۶۱۱۶۴T⁵ - ۰/۰۰۷۰۰۰۴۸ T⁶ + (۵/۲۸۸E - ۰/۵)T⁷ نرخ رسمی ارز (دلار) E x = ۸۵/۰۵۳۲۷ Z = ۰۱۶۰۸/۹۳۰۱X + ۱۰/۳۳۲T - ۰/۴۳۶۶T³ + ۰/۰۰۰۱۷۶۸T⁴ برای z = 1/x ، x = {۱ ۱۳۷۲-۱۴۰۰ ؛ ۰ سایر سالها} n = ۳۷، (۱۳۳۸-۱۳۷۴) (حمیدی زاده، ۷۶)
ترکیبات اشکال تابعی	$\mathrm{Ln}Y = \beta_0 + \beta_1 (\frac{1}{x_1}) + \beta_2 x_2 + u$ $\ln Y = (\beta_0 + \beta_2 x_2) + \beta_1 (\frac{1}{x_1})$	$\log Y = \beta_0 + \beta_1 (\frac{1}{x_1})$ $\beta^*_0 = (\beta_0 + \beta_2 x_2)$	مخارج سرمایه‌گذاری خصوصی log PIₜ = -۱۵/۷-۰/۰۰۷(iₜ + (E eₜ₊₁ - eₜ)/eₜ) + ۱/۲۸log Yₜ + ۰/۵((Epₜ₊₁ - pₜ)/pₜ) - ۰/۰۱۳log(Mₜ₋₁/pₜ₋₁) - ۱/۳log(Mₜ/pₜ) + ۲log Kₜ + ۰/۰۰۷ log GIₜ - ۰/۴۱log(Dcpₜ/pₜ) - ۰/۶log Ptₜ₋₁ n = ۳۴ ، (۱۳۳۸-۱۳۷۱)
تابعی لوژستیک	$Y = \beta_0 (1 + \beta^* e^{-\beta_1 x})^{-1} = \frac{\beta_0}{1 + B_2 e^{-\beta_1 x}}$ $Y = e^{\beta_0 - \beta_1 (\frac{1}{x_1})}$	$Y = e^{\beta_0 - \beta_1 x}$ برای $\frac{1}{x_1} = x$	(اصلی، ۱۳۷۵۰)

جدول ۲ـ تبیین متغیرهای مدلهای برآورد شده برای ایران

متغیرها	تبیین	متغیرها	تبیین
C	هزینه‌های خصوصی	KA	انباشت سرمایه در بخش کشاورزی
CU	مصرف خصوصی جامعه شهری	KI	انباشت سرمایه بخش صنایع و معادن
D	متغیر مجازی		
$\frac{DCP_t}{pc}$	حجم اعتبارات واقعی اعطایی		
	شبکه بانکی به بخش خصوصی		ناخالص ملی
E,Ex	نرخ رسمی ارز (دلار)	L	نیروی انسانی فعال اقتصادی
E_{et+1}	نرخ آینده ارز	L^0	نرخ رشد نیروی انسانی فعال
et	نرخ جاری ارز		اقتصادی
EP_{t+1}	سطح قیمت مورد انتظار آینده	LA	نیروی شاغل در بخش کشاورزی
G	هزینه‌های دولتی	LI	نیروی شاغل در بخش صنایع و
GDP	تولید ناخالص داخلی		معادن
GNP	تولید ناخالص داخلی	M_t	حجم پول رسمی در وضعیت
GI	مخارج سرمایه‌گذاری		حذف جریان دارایی‌های خارجی
	بخش عمومی		بخش خصوصی از عرضه پول
i	نرخ بهره بین‌المللی	Mt	حجم پول (اسمی)
II^t	سرمایه‌گذاری بخش صنایع و		
	معادن	MI	واردات کالاهای واسطه‌ای
IIK	سرمایه‌گذاری صنایع سرمایه‌ای	Ms	واردات خدمات
	و واسطه‌ای	Mk	واردات کالاهای سرمایه‌ای
K	سرمایه کل / سرمایه‌گذاری ثابت	M	واردات کل
	ناخالص داخلی / خالص	MuM	واردات واسطه‌ای بخش
	ذخیره سرمایه		صنایع و معادن
$K = \frac{\partial k}{Y}$	نسبت متوسط سرمایه‌گذاری ثابت		

	ناخالص داخلی به تولید		
$\frac{M}{pt}$	واردات به قیمت ثابت	XIN	صادرات کالاهای صنعتی
Mc	واردات کالاهای مصرفی	XNOT	صادرات تولیدات سنتی غیرنفتی
NVA	ارزش افزوده بخشهای غیرکشاورزی	VIK	ارزش افزوده صنایع واسطه‌ای و سرمایه‌ای
OR	درآمد دولت به ریالی نفت	VA	تولید بخش کشاورزی (ارزش‌افزوده)
PH	شاخص قیمت خرده‌فروشی	VI	تولید بخش صنایع و معادن / ارزش افزوده صنعت
PI	مخارج سرمایه‌گذاری خصوصی	VM	ارزش‌افزوده‌بجز صنعت و معدن
P_t	قیمت کالاهای مبادله شده	Y	رشد اقتصادی
P_N	قیمت کالاهای مبادله نشده	y	ریسک پرتعوی
PxNo	شاخص قیمت کالاهای صادراتی‌غیرنفتی	YNOt	میانگین وزنی GNP کشورهای واردکننده کالاهای غیرسنتی ایران (میلیارد ریال ثابت سال ۱۳۷۰)
PP	شاخص قیمت تولید	$Y = \frac{\partial Y}{Y}$	نرخ رشد اقتصادی
PYIN	شاخص قیمت میانگین وزنی تولیدناخالص ملی کشورهای‌واردکننده کالاهای صنعتی ایران (آسیا و خاورمیانه، میلیارد دلار به قیمت سال ۱۹۷۰)	ZNAPP	اعتبارهای غیرکشاورزی اعطایی نظام بانکی به بخش خصوصی
P_t	سطح قیمتها		
PGNP	شاخص صنعتی قیمت تولید ناخالص ملی		
R	کل اعتبارات تحقیقات کشور		
$R^{\circ} = \frac{\partial Y}{R}$	نسبت متوسط اعتبارات تحقیقات به تولید ناخالص ملی		
T	متغیر زمان (روند)		
X	مجموعه سهام پرتفوی		
X_0	صادرات نفتی		

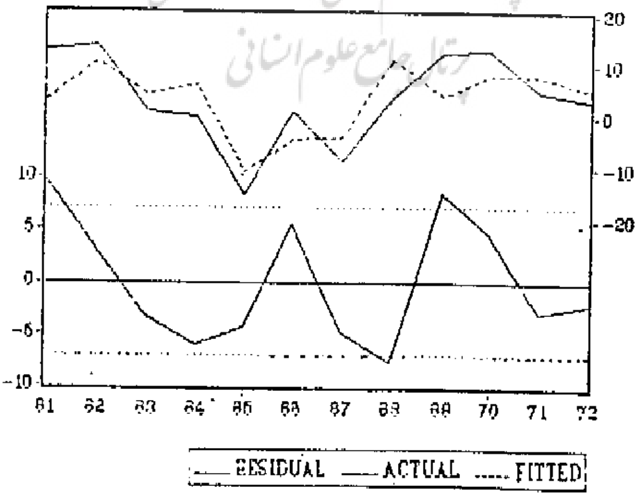
LS // Dependent Variable is YY
Date: 3-28-2074 / Time: 22:10
SMPL range: 1361 - 1372
Number of observations: 12

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	44.395311	25.434052	1.7455063	0.1190
LL	-6.6089421	2.3890888	-2.7663024	0.0244
IK	-78.176551	86.702540	-0.9016639	0.3936
IR	-22.806101	30.505470	-0.7476069	0.4761

R-squared	0.551567	Mean of dependent var	3.452500
Adjusted R-squared	0.383405	S.D. of dependent var	8.902175
S.E. of regression	6.990304	Sum of squared resid	390.9148
Log likelihood	-37.92876	F-statistic	3.279972
Durbin-Watson stat	1.650247	Prob(F-statistic)	0.079566

Coefficient Covariance Matrix

C,C	646.6910	C,LL	-51.07559
C,IK	-2025.757	C,IR	-595.2317
LL,LL	5.707745	LL,IK	134.5612
LL,IR	44.24281	IK,IK	7517.330
IK,IR	1482.469	IR,IR	930.5837



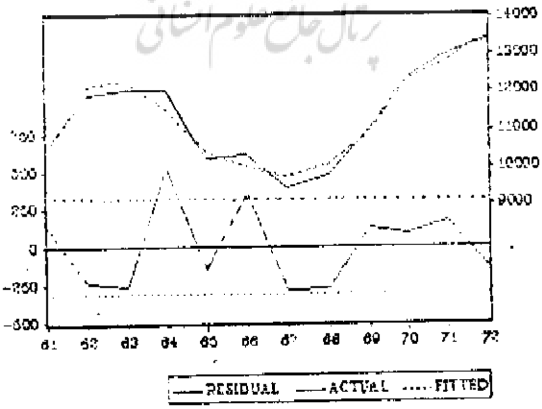
```
LS // Dependent Variable is YYY
Date: 8-28-2074 / Time: 23:22
SMPL range: 1361  -  1372
Number of observations: 12
```

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
C	2350.6761	2450.6607	0.9592010	0.3655
LLL	0.3099555	0.1798415	1.7234920	0.1231
IIR	23.520386	21.178953	1.1105547	0.2990
IIK	2.2520877	0.2915837	7.7236420	0.0001

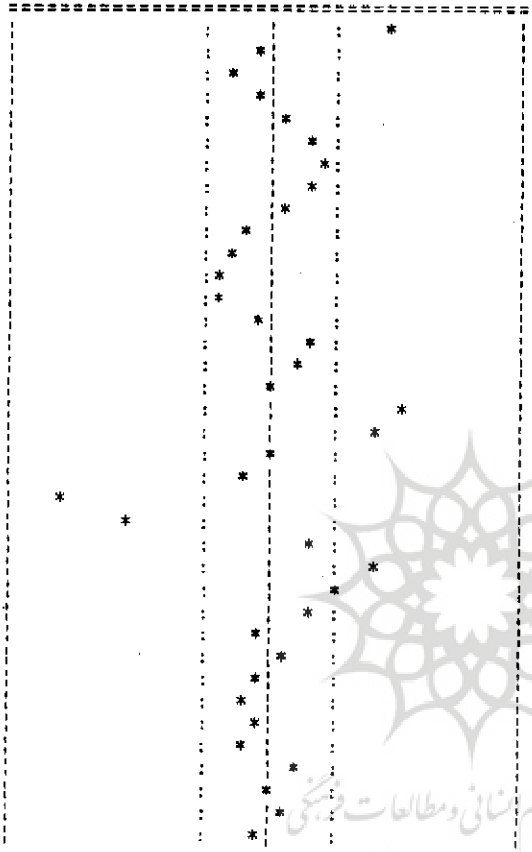
R-squared	0.956404	Mean of dependent var	11360.33
Adjusted R-squared	0.940055	S.D. of dependent var	1288.429
S.E. of regression	315.4538	Sum of squared resid	796080.0
Log likelihood	-83.64202	F-statistic	58.50085
Durbin-Watson stat	2.704987	Prob(F-statistic)	0.000008

Coefficient Covariance Matrix

C,C	6005738.	C,LLL	-435.0314
C,IIR	47053.15	C,IIK	-580.6870
LLL,LLL	0.032343	LLL,IIR	-3.573155
LLL,IIK	0.028899	IIR,IIR	448.5480
IIR,IIK	-4.450877	IIK,IIK	0.085021



Residual Plot



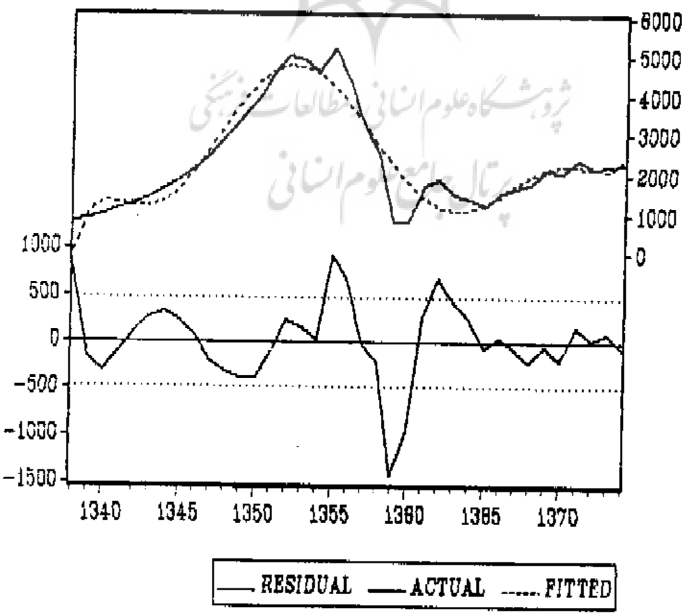
obs	RESIDUAL	ACTUAL	FITTED
1338	786.000	786.000	0.00000
1339	-133.481	884.600	1018.08
1340	-311.451	995.400	1306.85
1341	-130.663	1140.90	1271.56
1342	88.1915	1263.60	1175.41
1343	254.015	1425.20	1171.19
1344	326.163	1654.90	1328.74
1345	226.498	1884.90	1658.40
1346	63.2349	2194.00	2130.77
1347	-191.948	2501.00	2692.95
1348	-304.536	2977.20	3281.74
1349	-379.289	3454.50	3833.79
1350	-385.603	3907.60	4293.20
1351	-113.999	4502.70	4616.70
1352	246.702	5023.40	4776.70
1353	175.850	4938.40	4762.55
1354	27.6192	4607.80	4580.18
1355	922.456	5172.90	4250.44
1356	671.429	4477.80	3806.37
1357	-14.7664	3275.00	3289.77
1358	-199.297	2547.80	2747.10
1359	-1426.86	798.500	2225.36
1360	-961.055	806.700	1767.75
1361	287.595	1697.40	1409.80
1362	687.735	1863.70	1175.96
1363	436.563	1513.60	1077.04
1364	254.943	1363.60	1108.66
1365	-77.0609	1174.30	1251.36
1366	59.0801	1530.60	1471.52
1367	-64.4290	1661.00	1725.43
1368	-220.514	1744.50	1965.01
1369	-46.3223	2098.20	2144.52
1370	-191.127	2040.00	2231.13
1371	176.333	2397.00	2220.67
1372	28.5351	2184.00	2155.46
1373	84.2682	2220.00	2135.73
1374	-64.8577	2290.00	2354.86

obs	XOF				
1375	3123.404	4896.803	8319.293	14262.10	23871.28
1380	38614.48	60352.40	91381.96	134530.0	193203.8
1385	271505.9	374277.7	507259.7	677118.1	891643.6
1390	1159789.	1491867.	1899644.	2396478.	2997534.
1395	3719874.	4582704.	5607469.	6818151.	8241383.
1400	9906698.				

LS // Dependent Variable is XO
Date: 6-16-1997 / Time: 11:00
SMPL range: 1338 - 1374
Number of observations: 37

VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
T	1560.4190	315.65860	4.9433757	0.0000
T2	-647.30352	134.47222	-4.8136597	0.0000
T3	113.70995	21.480921	5.2935323	0.0000
T4	-9.0989877	1.6664055	-5.4602482	0.0000
T5	0.3616387	0.0673219	5.3717839	0.0000
T6	-0.0070048	0.0013615	-5.1449259	0.0000
T7	5.288E-05	1.088E-05	4.8582554	0.0000

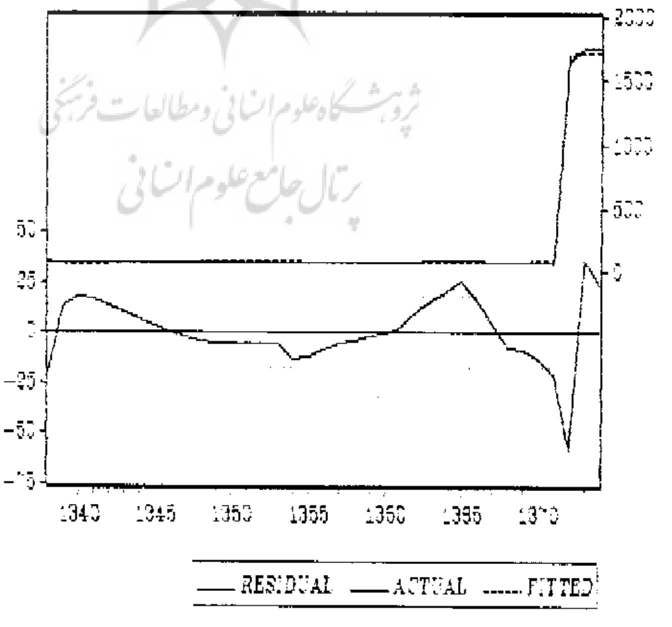
R-squared	0.890681	Mean of dependent var	2351.316
Adjusted R-squared	0.868817	S.D. of dependent var	1311.384
S.E. of regression	474.9720	Sum of squared resid	6767953.
Log likelihood	-276.6614	F-statistic	40.73777
Durbin-Watson stat	0.982726	Prob(F-statistic)	0.000000



LS // Dependent Variable is EX
Date: 7-03-1997 / Time: 15:45
SMPL range: 1338 - 1374
Number of observations: 37

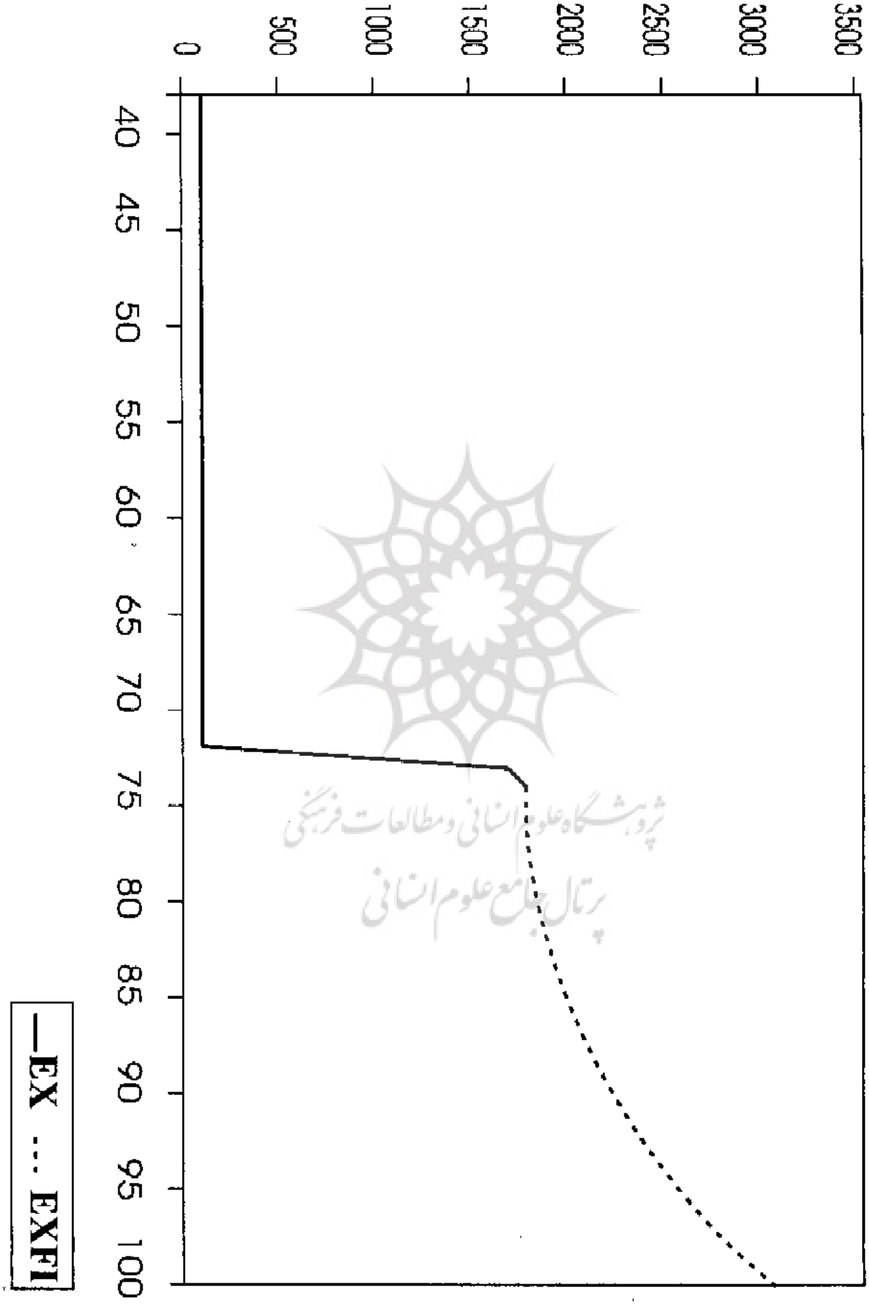
VARIABLE	COEFFICIENT	STD. ERROR	T-STAT.	2-TAIL SIG.
Z	85.053270	15.421356	5.5152914	0.0000
X	1608.9301	19.770035	81.382259	0.0000
T	10.331648	1.1212120	9.2147137	0.0000
T2	-0.4365719	0.0781062	-5.5894653	0.0000
T4	0.0001768	4.713E-05	3.7504006	0.0007

R-squared	0.998678	Mean of dependent var	207.7971
Adjusted R-squared	0.998513	S.D. of dependent var	453.9088
S.E. of regression	17.50181	Sum of squared resid	9802.024
Log likelihood	-155.7201	F-statistic	6045.604
Durbin-Watson stat	1.233519	Prob(F-statistic)	0.000000



```
=============================================================================================
                  Residual Plot                          obs RESIDUAL   ACTUAL     FITTED
=============================================================================================
|                       *       |       :                      | 1338 -19.6349  75.7500  95.3849
|                       :       |      *:                      | 1339  12.9965  75.7500  62.7535
|                       :       |       *                      | 1340  18.1474  75.7500  57.6026
|                       :       |       *                      | 1341  17.0749  75.7500  58.6751
|                       :       |      *:                      | 1342  14.0210  75.7500  61.7290
|                       :       |    *  :                      | 1343  10.3884  75.7500  65.3616
|                       :       |  *    :                      | 1344  6.76550  75.7500  68.9845
|                       :       |*      :                      | 1345  3.43277  75.7500  72.3172
|                       :       *       :                      | 1346  0.53139  75.7500  75.2186
|                       :      *|       :                      | 1347 -1.86922  75.7500  77.6192
|                       :      *|       :                      | 1348 -4.24068  75.2500  79.4907
|                       :   *   |       :                      | 1349 -5.74034  75.0900  80.8303
|                       :      *|       :                      | 1350 -5.27299  76.3800  81.6530
|                       :   *   |       :                      | 1351 -5.61618  76.3700  81.9862
|                       :   *   |       :                      | 1352 -5.48738  76.3800  81.8674
|                       :      *|       :                      | 1353 -4.96216  76.3800  81.3422
|                       :*      |       :                      | 1354 -12.8381  67.6250  80.4631
|                       :  *    |       :                      | 1355 -11.6640  67.6250  79.2890
|                       :   *   |       :                      | 1356 -8.60940  69.2750  77.8844
|                       :   *   |       :                      | 1357 -5.69414  70.6250  76.3191
|                       :      *|       :                      | 1358 -4.19313  70.4750  74.6681
|                       :      *|       :                      | 1359 -2.53621  70.4750  73.0112
|                       :       *       :                      | 1360 -0.95794  70.4750  71.4329
|                       :       |*      :                      | 1361  2.29348  72.3160  70.0225
|                       :       |    *  :                      | 1362  10.5763  79.4500  68.8737
|                       :       |      *:                      | 1363  15.3481  83.4330  68.0849
|                       :       |       :*                     | 1364  20.4024  88.1610  67.7586
|                       :       |       :  *                   | 1365  25.9909  93.9930  68.0021
|                       :       |      *:                      | 1366  15.3011  84.2280  68.9269
|                       :       |*      :                      | 1367  5.01708  75.6660  70.6489
|                       :   *   |       :                      | 1368 -7.66632  65.6220  73.2883
|                       :   *   |       :                      | 1369 -8.38070  68.5890  76.9697
|                       :*      |       :                      | 1370 -13.2329  68.5890  81.8219
|                      *:       |       :                      | 1371 -22.2481  65.7300  87.9781
|     *                 :       |       :                      | 1372 -58.2159  1646.29  1704.51
|                       :       |       :       *              | 1373  35.3131  1749.00  1713.69
|                       :       |       :*                     | 1374  22.9028  1747.50  1724.60
=============================================================================================
```

obs	EXF1				
1375	1737.387	1752.211	1769.228	1788.601	1810.498
1380	1835.090	1862.553	1893.067	1926.817	1963.991
1385	2004.782	2049.388	2098.010	2150.853	2208.127
1390	2270.047	2336.831	2408.702	2485.886	2568.615
1395	2657.124	2751.653	2852.445	2959.749	3073.817
1400	3194.906				


0
500
1000
1500
2000
2500
3000
3500
40 45 50 55 60 65 70 75 80 85 90 95 100
—EX ... EXFI

منابع

۱. اُکنل - باورسن. ***پیش‌بینی سریهای زمانی***، ترجمه رضاشیوا، موسسه مطالعات و پژوهشهای بازرگانی، ۱۳۷۵

۲. جعفری صمیمی، احمد. ***اقتصاد ریاضی***، ماجد، ۱۳۶۷

۳. حمیدی‌زاده، محمدرضا. ***مدلسازی نظام تحقیقاتی کشور***، پایان نامه تحصیلی دوره دکترای مدیریت باگرایش تحقیق در عملیات، دانشگاه تهران، ۱۳۷۴.

۴. ساری، ام . جی.سی. ***مقدمه‌ای بر اقتصاد سنجی***، ترجمه حسین عظیمی، جامعه واقتصاد، ۱۳۶۰

۵. شهشهانی، احمد. ***الگوی اقتصاد سنجی ایران وکاربردهای آن***، دانشگاه تهران، ۱۳۵۷.

۶. و بر،جین.ا. ***تحلیلهای ریاضی و کاربرد آن در اقتصاد و بازرگانی***، ترجمه حسین علی پورکاظمی، دانشگاه شهید بهشتی، جلد اول و جلد دوم ۱۳۶۵.

۷. علی، مهدی. ***برآوردی از سرمایه گذاری خصوصی در ایران در سالهای ۷۱-۱۳۳۸***، مجله برنامه و بودجه، شماره ۱۰ سال اول، بهمن ۱۳۷۵ صفحات ۳۶-۱۹.

۸. گجراتی، دامودار. ***مبانی اقتصاد سنجی***، ترجمه حمید ابریشمی، دانشگاه تهران، جلد اول و دوم، ۱۳۷۲

۹. معاونت امور اقتصادی، ***شناخت ساختار الگوی اقتصاد سنجی کلان ایران***، وزارت اقتصاد و امور دارایی، ۱۳۷۵.

۱۰. معاونت امور اقتصادی، ***بررسی ساختار الگوی اقتصادسنجی کلان ایران***، وزارت اقتصاد وامور دارایی،۱۳۷۳

۱۱. مک گایکن، جی.آر.و آر سی، مویر. ***اقتصاد مدیریت***، ترجمه محمدرضا حمیدی‌زاده، ماجد، ۱۳۷۱.

۱۲. نعمتی، مهرداد. ***تعیین فرصتهای بهین سرمایه‌گذاری در بورس اوراق بهادار تهران***، رساله کارشناسی ارشد، دانشکده علوم اداری دانشگاه شهیدبهشتی ۱۳۷۶

۱۳. لیلین، د.ام، رابرت ای. ها.وجک جانسون. ***راهنمای استفاده از میکرو Tsp***، ترجمه رامین پاشایی فام، نشرنی، ۱۳۷۵.

14. Blecha, B.J., "Econometric Source Book" , Wadsworth pub. co., 1989.

15. Cassidy , H.S., "Using Econometrics: A Beginner's Guide", Reston Pub. Co., Inc, 1981

16. Clark , C.T.& I.L. Schkade, "Statistical Analysis for Administrative Decision", South - western Pub. Co., 1979.

17. Caulcutt, R., "Statistics on R&D", Chapman& Hall, 1991

18. Eatwell, J., & et. al.," Econometrics" , Macmillan Reference Book, 1990.

19. Hamburg, M.& P.Young, "Statistical Anlysis for Decision Making", The Dryden Press, 1994.

20. Mc Guigan, J.R.&R.C. Moyer, "Managerial Economics" , West pub. Co., N.Y., 1989

21. Pindyck R.S. & D.L., Rubenfeld, "Econometric Models of Economic Forecasts" , McGraw - Hill Book Co., 1990.