درآمدی بر نظریه توابع تولید

محمدرضا اکبری*

۱. مقدمه

بنگاه‌های اقتصادی به عنوان واحدهای تولیدی در اقتصاد اعم از واحدهای تولید صنعتی، کشاورزی و خدماتی ترکیبات مختلفی از عوامل تولید (نهاده‌ها) شامل مواد خام، کالاهای واسطه‌ای، انواع نیروهای انسانی با طیف متنوعی از مهارت، توانایی‌ها و کالاهای سرمایه‌ای فیزیکی از قبیل ماشین‌آلات، تجهیزات و ساختمان را برای تولید سطح معینی از محصول مورد استفاده قرار می‌دهند به نحوی که همواره کارایی فنی[1] (طبق فرض تئوری تولید) حداکثر باشد. در عین حال هدف بنگاه‌های اقتصادی در این نظریه حداکثرسازی سود است که در این راستا از طریق تابع تولید و هزینه سود حداکثر می‌شود. اگر به هر علتی چنین هدفی محقق نشود اولویت دوم هدف بنگاه حداقل‌سازی هزینه خواهد بود که در این صورت درآمد او حداکثر می‌شود. مقاله حاضر به بررسی نظری تابع تولید و شکل‌های ریاضی ارائه شده پرداخته که از آنها جهت تخمین‌های تجربی استفاده می‌شود.

از طرف دیگر تابع تقاضای نهاده که یک تقاضای مشتقه است با استفاده از تابع تولید، قیمت محصول و قیمت نهاده و سایر نهاده‌های مکمل و جانشین به‌دست می‌آید. در این مقاله ابتدا با گذری کوتاه بر تابع تولید کلاسیک‌ها به بررسی تابع تولید نئوکلاسیک پرداخته و خصوصیات آن بحث می‌شود. سپس انواع فرم‌های ارائه‌شده برای آن بررسی می‌شود و میزان انطباق آنها با تابع تولید نئوکلاسیک تجزیه و تحلیل می‌گردد. هدف از این مقاله آشنایی اجمالی خوانندگان خصوصاً دانشجویان رشته اقتصاد با نظریه توابع تولید است.

---

* عضو هیئت علمی دانشگاه آزاد اسلامی واحد نراق.

1. Technical Efficiency.

۲. ویژگی‌های تابع تولید

از نظر فنی، تابع تولید ترکیبی از نهاده‌ها را نشان می‌دهد که در سطوح مختلف حداکثر تولید را بتواند نتیجه دهد. اقتصاددانان کلاسیک که خصوصاً در مورد تولید کشاورزی به بحث می‌پرداختند از دیرباز قانون بازدهی نزولی را مورد تأکید قرار می‌دادند، لیکن به شکلی ساده و ابتدایی بوده است، به صورتی که مفاهیم تولید نهایی و مراحل تولید در آن شکل نگرفته بود.

اقتصاددانان نئوکلاسیک در این زمینه پیشرفت زیادی حاصل کردند به طوری که بر اساس تحلیل مارژینالیستی، مفهوم تولید نهایی، تحلیل کمی و ریاضی موضوع و بالاخره مراحل سه‌گانه تولید به تئوری اضافه شده و آن را به شکل پیشرفته امروزی تبدیل می‌کند. چنانچه تابع تولید با یک نهاده در نظر گرفته شود خواهیم داشت $y=f(x)$[1] که در آن y تولید و x نهاده تولیدی می‌باشد. در این تابع تولید، مرحله اول تا جایی است که تولید متوسط فیزیکی[2] و تولید نهایی فیزیکی[3] (بهره‌وری نهایی) برابر شوند $APP=MPP$. مرحله دوم تا جایی است که تولید نهایی فیزیکی برابر صفر شود. و بالاخره مرحله سوم در جایی است که تولید نهایی فیزیکی منفی است. کشش تولیدی[4] که نسبت درصد تغییر در تولید نسبت به درصد تغییر در نهاده است می‌تواند به‌صورت زیر نشان داده شود:

$$E_p = \frac{dLny}{dLnx} = \frac{MPP}{APP} \qquad (1)$$

در مرحله I، $E_p>1$ و در مرحله II، $0<E_p<1$ و در مرحله سوم $E_p<0$ می‌باشد. کاملاً روشن است که بنگاه هرگز در مرحله III قرار نخواهد گرفت حتی اگر نهاده x رایگان باشد و چون در مرحله I تولید یا بازدهی نهایی روندی افزایشی دارد بنگاه، آگاهانه این مرحله را پشت سر خواهد گذاشت، لذا عملاً مرحله II تولید (مرحله اقتصادی تولید) انتخاب خواهد شد.

شکل عمومی تابع تولید به‌صورت زیر نوشته می‌شود: $Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

که در آن Q مقدار محصول و x_iها نهاده‌های تولید هستند. از طریق منحنی‌های تولید

---

۱. شکل این تابع برحسب خصوصیات نئوکلاسیکی تابع تولید بصورت یک معادله درجه ۳ می‌باشد که داریم:

$y = -ax^3 + bx^2 + cx$

2. Average Physical Production.

3. Marginal Physical Production.

4. Production Elasticity.

همسان[1] که معرف مکان هندسی ترکیبات کارای نهاده‌ها در هر سطح مشخصی از تولید می‌باشد، می‌توان مشخصات توابع تولید را بررسی کرد. بصورتی که با اتصال نقاطی که تولید نهایی فیزیکی آنها صفر باشد می‌توان مراحل سه‌گانه را برای هر نهاده نشان داد. چنانچه برای توابعی که بتواند این نقاط را نشان دهد حداکثر تولید وجود دارد.

با حرکت روی منحنی تولید همسان، تغییرات نرخ نهایی جانشینی فنی[2] (MRTS) و نسبت نهاده‌ها در یک جهت است. MRTS شیب منحنی تولید همسان را نشان می‌دهد که با نسبت تولید نهایی فیزیکی نهاده‌ها برابر است و نسبت نهاده‌ها تکنیک یا فرآیند تولید را نشان می‌دهد. نسبت تغییرات درصدی در نسبت نهاده‌ها به تغییرات درصدی در نرخ نهایی جانشینی فنی را اصطلاحاً کشش جانشینی[3] می‌گویند که معمولاً با نماد δ نشان می‌دهند، یعنی اگر فقط دو نهاده x_1 و x_2 داشته باشیم:

$$\delta = \frac{\% \Delta\ (x_2 / x_1)}{\% \Delta\ MRTS_{x_1x_2}} = \frac{d\ Ln\ (x_2 / x_1)}{d\ Ln\ MRTS_{x_1x_2}} \quad (۲)$$

اگر عوامل تولید صرفاً مکمل یکدیگر باشند نسبت دو نهاده ثابت بوده و در نتیجه $\delta=0$ می‌باشد. در این حالت منحنی تولید همسان به‌صورت زاویه قائمه ترسیم می‌شود. اگر عوامل تولید جانشینی کامل باشند، تغییرات MRTS صفر بوده و بنابراین $E=\infty$ خواهد بود که در این حالت منحنی تولید همسان به صورت یک خط راست با شیب منفی ترسیم می‌شود. و در حالت عمومی که منحنی تولید همسان نسبت به مبدأ مختصات محدب ترسیم می‌شوند $\infty>\delta>0$ به‌دست می‌آید.

از آنجا که نرخ نهایی جانشینی فنی یک مفهوم نظری است و اطلاعات راجع به آن به دشواری به‌دست می‌آید لذا به جای آن با فرض شرایط تعادلی (متضمن حداکثر سود یا حداقل هزینه) می‌توان برحسب نسبت قیمت عوامل به‌صورت زیر نوشته شود:

$$\delta = \frac{\% \Delta\ (x_1 / x_2)}{\% \Delta\ (p_1 / p_2)} \quad (۳)$$

که در آن p_1 و p_2 به ترتیب قیمت نهاده‌های x_1 و x_2 هستند.

وقتی بیش از دو نهاده داشته باشیم می‌توانیم کشش جانشینی دوبه‌دوی عوامل تولید را که به کشش‌های جزئی آلن[4] معروف است، محاسبه نمود. در این حالت چنانچه بین نهاده‌ها δ مثبت باشد، جانشین یکدیگر و اگر منفی باشد، مکمل یکدیگر محسوب می‌شوند.

1. Isoquant Curves.
2. Marginal Rate of Technical Substitution.
3. Elasticity of Substitution.
4. Allen Partial Elasticities of Substitution.

ضریب تابع[1] یا کشش نسبت به مقیاس،[2] تغییرات بلند مدت در تولید نسبت به تغییر تمامی نهاده‌های تولید به یک نسبت ثابت را نشان می‌دهد که بنا به تعریف برابر است با:

$$\varepsilon = \frac{dQ}{d\lambda} \cdot \frac{\lambda}{Q} \qquad (۴)$$

که در آن $\frac{d\lambda}{\lambda}$ تغییرات نسبی همه نهاده‌ها را نشان می‌دهد. ثابت می‌شود که ضریب تابع برابر با حاصل جمع کشش عوامل تولید است، یعنی:

$$\varepsilon = E_{x_1} + E_{x_2} \qquad (۵)$$

که در آن E_{x_1} و E_{x_2} کشش تولید نسبت به هر یک از دو نهاده می‌باشد.

اگر $\varepsilon=1$ باشد بازدهی ثابت نسبت به مقیاس داریم و چنانچه $\varepsilon>1$ بازدهی فزاینده و $\varepsilon<1$ بازدهی کاهنده‌ای نسبت به مقیاس داریم. ثابت می‌شود که ε معکوس کشش هزینه کل نسبت به تولید است که با K نشان داده می‌شود؛ یعنی $\varepsilon=\frac{1}{K}$. K عبارت است از درصد تغییرات هزینه نسبت به درصد تغییرات تولید.

۳. انواع مشهور توابع تولید

می‌توانیم توابع تولید را بر اساس کشش جانشینی آنها بین عوامل تولید تقسیم کنیم. لکن یکی از معیارهای مناسب‌تر در تقسیم توابع بر اساس قابلیت آنها در نشان دادن مراحل سه‌گانه نئوکلاسیکی تابع تولید است که به شرح مختصر هر یک می‌پردازیم.

۱-۳. تابع تولید خطی

تابع تولید خطی[3] را می‌توانیم به‌صورت زیر در نظر بگیریم:

$$Q = A + \alpha x_1 + \beta x_2 \qquad (۶)$$

که در آن Q مقدار محصول، A، α و β پارامترهای ثابت هستند به‌گونه‌ای که α تولید نهایی فیزیکی نهاده x_1 و β تولید نهایی فیزیکی نهاده x_2 می‌باشد که در عین حال مقادیر ثابتی نیز می‌باشند. با توجه به این خصوصیات، نرخ نهایی جانشینی فنی نیز ثابت می‌باشد:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{MPP_{x_1}}{MPP_{x_2}} = \frac{\beta}{\alpha} \qquad (۷)$$

بنا به ثابت بودن نرخ مذکور، کشش جانشینی نیز برابر بی‌نهایت است: $\delta=\infty$

بنابراین، منحنی تولید همسان این تابع خطی با شیب ثابت منفی $\frac{\beta}{\alpha}$ می‌باشد. به عبارت دیگر عوامل تولید کاملاً جانشین یکدیگر می‌شوند.

---

1. Scale Elasticity.
2. Function Coefficient.
3. Linear Production Function.

۲ـ۳. تابع تولید با نسبت‌های ثابت

این تابع یکی از ساده‌ترین شکل‌های تابع تولید می‌باشد که از تحلیل نهاده ـ ستاده لئونتیف[1] (۱۹۵۱) اقتباس شده است که به تابع تولید لئونتیف معروف می‌باشد که به شکل زیر نوشته می‌شود:

$$Q = \mathrm{Min}\left(\frac{x_1}{\alpha}, \frac{x_2}{\beta}\right) \qquad (۸)$$

که α و β در آن پارامترهای ثابت هستند. (x_1 و x_2 می‌توانند نهاده سرمایه و کار تلقی شوند)؛ با توجه به اینکه کوچک‌ترین جملات داخل پرانتز انتخاب خواهد شد، معادله‌ای که به‌صورت معادله رگرسیون برای برآورد فرمول‌بندی می‌شود فقط دارای یک متغیر مستقل یا توضیحی خواهد بود که همان عامل محدودکننده است.

در این تابع عوامل تولید مکمل یکدیگرند، لذا منحنی‌های تولید همسان به‌صورت یک زاویه قائمه ترسیم می‌شوند. تولید نهایی هر کدام از نهاده‌ها صفر است و فقط یک نسبت به‌کارگیری نهاده‌ها که از رأس زاویه قائمه منحنی‌های تولید همسان بگذرد وجود دارد، لذا $\delta=0$ است هم‌چنین تابع همگن از درجه یک می‌باشد و بنابراین، دارای خاصیت بازدهی ثابت نسبت به مقیاس است.

۳ـ۳. تابع تولید کاب ـ داگلاس[2]

بدون شک معروف‌ترین تابع تولید با داشتن بیشترین کاربرد می‌باشد که دلیل آن سادگی در تحلیل و برآورد آن بوده است. این تابع توسط کاب و داگلاس در ۱۹۲۸ ارائه گردید، لیکن این تابع با محدودیت‌های جدی روبرو است که از جمله آن این است که سه مرحله تابع تولید نئوکلاسیک را نشان نمی‌دهد. شکل این تابع به‌صورت زیر است:

$$Q = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{\beta} \qquad (۹)$$

که در آن A، α و β ضرایب ثابت هستند. مجموع توان‌های تابع، یعنی $\alpha+\beta$ درجه بازدهی نسبت به مقیاس را نشان می‌دهد (در صورتیکه فقط همین دو نهاده وجود داشته باشد). اگر در این تابع دو نهاده x_1 و x_2 متغیر دقت کنترل باشند و سایر نهاده‌ها ثابت باشند، آنگاه پارامتر A اثرات نهاده‌های ثابت را نشان می‌دهد، یعنی:

$$A = \sum x_i^{\beta_i} \qquad i = 3, 4, \dots, n$$

---

1. Leontief.

2. Cobb, C. W. - Douglas, P. H.

اثر تکنولوژی می‌تواند در β_iها یا A منعکس شود.
در حالت کلی وقتی n نهاده متغیر باشد خواهیم داشت:

$$Q = A \prod_{i=1}^{n} x_i^{\beta_i} \qquad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (۱۰)$$

β_i نشان‌دهندهٔ کشش تولیدی نهاده i می‌باشد، یعنی: $\beta_i = \frac{d\ LnQ}{d\ Lnx_i}$

در این تابع همواره تولید نهایی نهاده‌ها و در نتیجه β_iها مثبت‌اند، یعنی داریم:

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = \frac{\beta_i Q}{x_i} > 0$$

از آنجا که کشش تولیدی هر نهاده نسبت تولید نهایی به تولید متوسط آن می‌باشد، چون این نسبت ثابت است مشخص‌کردن مراحل سه‌گانه تولید منتفی است، تولیدات نهایی و متوسط عبارتند از:

$$MPP_{x_i} = \beta_i A x_i^{\beta_i - 1} \Sigma x_j^{\beta_j} \qquad (\text{برای تمام مقادیر } j \neq i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$APP_{x_i} = A x_i^{\beta_i - 1} \Sigma x_j^{\beta_j} \qquad (\text{برای تمام مقادیر } j \neq i = 1, 2, \ldots, n)$$

اگر مقدار هر کدام از نهاده‌ها صفر باشد مقدار تولید نیز صفر می‌شود لذا باید مقدار کلیه نهاده‌ها در تابع گنجانده شود، در غیر این صورت تابع تولید از درجه اعتبار ساقط است. چنانچه از نظر تجربی نهاده‌ها تفکیک شده به‌کار روند این تابع مدل خوبی برای استفاده نخواهد بود.

با لگاریتم‌گیری از طرفین تابع و اضافه‌کردن جمله پسماند خطا، رابطه به‌صورت معادله خطی رگرسیون جهت برآورد می‌تواند مورد استفاده قرار بگیرد:

$$LnQ = LnA + \sum_{i=1}^{n} \beta_i\ Lnx_i + e \qquad (۱۱)$$

که در آن e جمله پسماند می‌باشد.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که کشش جانشینی بین عوامل تولید در تابع کاب ـ داگلاس بدون توجه به مقدار β_iها و نوع بازدهی نسبت به مقیاس، همواره برابر ۱ است.

برای مقادیر محدود نهاده‌ها حداکثر متناهی برای تابع وجود ندارد، در طول مسیر توسعه[1] همواره تابع با روندی متناسب با مقدار ضریب تابع افزایش می‌یابد که می‌تواند با

1. Expantion Path.

نرخی ثابت، فزاینده و یا کاهنده افزایش یابد. اگر β_iها هر کدام کوچک‌تر از یک باشند ($0<\beta_i<1$) آنگاه تابع فقط مرحله II تولید را نشان می‌دهد، و چنانچه ضریب تابع کوچک‌تر از ۱ باشد، معمولاً نقطه حداکثر عمومی[1] سود وجود خواهد داشت.

۴-۳. تابع تولید اسپیلمن[2]

شکل ابتدایی این تابع ابتدا توسط میتچرلیچ[3] ارائه و سپس توسط اسپیلمن به‌صورت زیر توسعه یافت:

$$Q = A\,[1 - \alpha^{x_1}]\,[1 - \beta^{x_2}] \qquad (۱۲)$$

که در آن A، α و β پارامترهای تابع‌اند که به‌صورت $\beta\leq 1$ و $\alpha\geq 0$ و $\alpha, \beta\leq 1$ مقید است. در این تابع تولیدات نهایی عوامل تولید مثبت و کاهنده‌اند، یعنی:

$$MPP_{x_1} = \frac{\partial Q}{\partial_{x_1}} = -A\,\mathrm{Ln}\alpha\,[1 - \beta^{x_2}]\,\alpha^{x_1} > 0$$

$$\frac{\partial^2 MPP_{x_1}}{\partial x_1^2} = -A\,\mathrm{Ln}^2\alpha\,[1 - \beta^{x_2}]\,\alpha^{x_1} < 0$$

$$MPP_{x_2} = \frac{\partial Q}{\partial_{x_2}} = A\,\mathrm{Ln}\beta\,[1 - \alpha^{x_1}]\,\beta^{x_2} > 0$$

$$\frac{\partial^2 MPP_{x}}{\partial x_2^2} = -A\,\mathrm{Ln}^2\beta\,[1 - \alpha^{x_1}]\,\beta^{x_2} < 0$$

۵-۳. تابع تولید با کشش جانشین ثابت (CES)[4]

این تابع در ۱۹۶۱ بدنبال کار تحقیقی سولو، مین‌هاوس، آرو و چنری[5] معرفی شد که البته به نام ارائه‌دهندگان آن تحت عنوان CES-SMAC نیز معروف است. از این تابع استفاده‌های زیادی خصوصاً در زمینه محاسبه مقدار برگشت شدت استفاده از عوامل تولید در تجارت بین‌الملل به عمل آمده است. این تابع در حقیقت محدودیت تابع تولید کاب ـ داگلاس که فرض محدودکننده کشش جانشینی واحد بین زوج‌های عوامل تولید را دارد برطرف کرده

1. Global.
2. Spillman.
3. Mitscherlich.
4. Constant Elasticity of Substitution.
5. Solow, Minhas, Arrow, Chenery.

است. فرم ریاضی آن به‌صورت زیر است:

$$Q = A\,[\,\alpha\, x_1^{-\rho} + (1-\alpha)\, x_2^{-\rho}\,]^{\frac{-1}{\rho}} \qquad (۱۳)$$

که در آن $A>0$ پارامتر کارایی و $0<\alpha<1$ پارامتر توزیع یا ضریب اهمیت نهاده‌ها و ρ پارامتر کشش جانشینی می‌باشد. کشش جانشینی بین صفر تا بینهایت می‌تواند متغیر باشد $0<\delta<\infty$ و هم‌چنین رابطه $\alpha+(1-\alpha)=1$ بیانگر فرض بازدهی ثابت نسبت به مقیاس است که البته فرض الزام‌آوری نیست و به جای $1-\alpha$ می‌توانیم از ضریب $\beta>0$ استفاده کنیم که در آن‌صورت $(\alpha+\beta)$ نشاندهنده درجه همگنی یا نوع بازدهی نسبت به مقیاس تابع است.

تولیدات نهایی نهاده‌ها عبارتند از:

$$MPP_{x_1} = \frac{\alpha}{A^{\rho}}\left[\frac{Q}{x_1}\right]^{1+\rho} \quad , \; MPP_{x_2} = \frac{1-\alpha}{A^{P}}\left[\frac{Q}{x_2}\right]^{1+\rho}$$

بنابراین، نرخ نهایی جانشینی فنی عبارت است از:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{\alpha}{1-\alpha}\left[\frac{x_2}{x_1}\right]^{1+\rho} \qquad (۱۴)$$

بنا به رابطه فوق نرخ نهایی جانشینی کاهنده می‌باشد $\frac{d\; MRTS_{x_1x_2}}{dx_1} < 0$ و منحنی‌های تولید همسان برای تمام مقادیر $\rho>-1$ نسبت به مبدأ مختصات محدب‌اند. بنابراین، برای مقادیر $x_1, x_2>0$ تابع تولید با کشش جانشینی ثابت اکیداً شبه‌مقعر[1] است.

به سادگی ثابت می‌شود که تابع همگن از درجه ۱ است که البته به خاطر چنین محدودیتی که می‌تواند ایجاد کند شکل عمومی‌تر این تابع به‌صورت زیر نوشته می‌شود که همگن از درجه μ می‌باشد.

$$Q = A\,[\,\alpha\, x_1^{-\rho} + (1-\alpha)\, x_2^{-\rho}\,]^{\frac{-\mu}{\rho}} \qquad (۱۵)$$

1. Strictly Quas - Concave.

کشش جانشینی تابع عبارت است از:

$$\delta = \frac{d\ (x_2 / x_1)}{d\ MRTS} \cdot \frac{MRTS}{(x_2 / x_1)} =$$

$$\frac{1}{d\ MRTS / d\ (x_2 / x_1)} \cdot \frac{(1 - \alpha / \alpha)(x_2 / x_1)^{1+\rho}}{(x_2 / x_1)} =$$

$$\frac{1}{(1 + \rho)\ (1 - \alpha / \alpha)\ (x_2 / x_1)} \cdot \frac{(1 - \alpha / \alpha)(x_2 / x_1)^{1+\rho}}{(x_2 / x_1)} = \frac{1}{1+\rho}$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود رابطه نزدیکی بین ρ و δ وجود دارد. به همین دلیل در ابتدای تعریف تابع، ρ به عنوان پارامتر کشش جانشینی معرفی شده است.

تابع CES ابزار بسیار مناسبی جهت نشان دادن رابطه بین انحنای منحنی‌های تولید همسان و کشش جانشینی می‌باشد چون $0<\delta<\infty$ است در اینصورت $\rho>-1$ خواهد بود. با توجه به این رابطه می‌توان حالات زیر را استخراج کرد.

الف) $\rho \to -1 \Rightarrow \delta \to \infty$

به طور کلی منحنی‌های تولید همسان با توجه به تابع CES همگن از درجه ۱ (رابطه شماره (۱۳)) به‌صورت زیر قابل استخراج است:

$$\alpha\, x_1^{-\rho} + (1 - \alpha)\, x_2^{-\rho} = \left[\frac{Q}{A}\right]^{-\rho} = \lambda \qquad (۱۶)$$

که در آن $\lambda>0$ و مقداری ثابت است. در این حالت خاص توان‌های مربوط به x_1 و x_2 در سمت چپ رابطه (۱۶) برابر ۱ بوده و منحنی‌های تولید همسان به‌صورت خط راست درمی‌آیند، یعنی داریم:

$$\bar{Q} = \alpha\, x_1 + (1 - \alpha)\, x_2 \qquad (۱۷)$$

با کمی دقت درمی‌یابیم که رابطه شماره (۱۷) کاملاً مشابه رابطه شماره (۶) می‌باشد که دو نهاده کاملاً جانشین یکدیگر بوده و این جانشینی با نسبت ثابت $\frac{\alpha}{(1-\alpha)}$ انجام می‌گیرد.

ب) $\rho \to \infty \Rightarrow \delta \to 0$

تحت این شرایط اگر $x_1>x_2$ باشد، MRTS (طبق رابطه (۱۴)) به سمت صفر میل کرده و منحنی تولید همسان به سمت خط افقی گرایش می‌یابد و چنانچه $x_2>x_1$ باشد MRTS به سمت بی‌نهایت میل کرده و منحنی‌های تولید همسان به سمت خط عمودی گرایش پیدا می‌کنند. بنابراین، جانشینی بین عوامل تولید امکان‌پذیر نیست و منحنی‌های تولید همسان به سمت دو خط عمود بر هم گرایش پیدا می‌کنند. و وضعیتی مشابه تابع تولید لئونتیف را ایجاد می‌کنند.

ج) $\rho > 0 \Rightarrow 0 < \delta < 1$

در اینجا از رابطهٔ شماره (۱۶) استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه $\bar{\lambda}$ برای تمام مقادیر مثبت است و هیچ یک از جملات سمت چپ رابطه فوق نمی‌تواند منفی باشد. بنابراین، هیچ یک از جملات نمی‌تواند بیش از $\bar{\lambda}$ باشد (زیرا مجموع دو جمله سمت چپ رابطه است) و با توجه به اینکه $\bar{\lambda}$ مقدار متناهی است، لذا هیچ یک از جملات فوق‌الذکر نمی‌تواند بینهایت گردد. این بدان معنا است که منحنی تولید همسان دارای دو مجانب عمودی و افقی می‌باشد و هیچ یک از محورها را قطع نمی‌کند. سطح مجانب‌ها عبارت است از:

$$x_1 \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_2 = \left[\frac{\bar{\lambda}}{1-\alpha}\right]^{\frac{-1}{\rho}}$$

$$x_2 \to 0 \qquad \Rightarrow \qquad x_1 = \left[\frac{\bar{\lambda}}{\alpha}\right]^{\frac{-1}{\rho}}$$

در نتیجه در این حالت (ج) منحنی‌های تولید همسان شکلی بین دو حالت لئونتیف و کاب ـ داگلاس را ایجاد می‌کنند.

د) $\rho \to 0 \Rightarrow \delta = 1$

وقتی ρ به سمت صفر و δ به سمت یک میل می‌کند، ثابت می‌شود که حد تابع CES (رابطه (۱۳))، تابع کاب ـ داگلاس (رابطه (۱۹)) با قید $\beta=1-\alpha$ خواهد بود.

از رابطه (۱۳) خواهیم داشت:

$$\text{Ln } Q = \text{Ln } A - \frac{1}{p} \text{Ln } [\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha) x_2^{-\rho}]$$

و یا

$$\text{Ln } Q - \text{Ln } A = (\text{Ln } [\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha) x_2^{-\rho}]) / -\rho$$

با حدگیری از رابطه فوق وقتی $\rho \to 0$ خواهیم داشت:

$$\lim_{\rho \to 0} [\text{Ln } Q - \text{Ln } A] = (\lim_{\rho \to 0} \text{Ln } [\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha) x_2^{-\rho}]) / \lim_{\rho \to 0} -\rho = \frac{0}{0}$$

رابطه فوق یکی از صور مبهم است که با استفاده از قاعده هوپیتال[1] رفع ابهام می‌کنیم و خواهیم داشت:

1. L´ Hopital's Rule.

$$\lim_{\rho\to 0}[\mathrm{Ln}\, Q - \mathrm{Ln}\, A] = (\lim_{\rho\to 0} \mathrm{Ln}\,[\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)\, x_2^{-\rho}]'\,) \,/\, \lim_{\rho\to 0} (-\rho)' =$$

$$\frac{\lim_{\rho\to 0}\left[\frac{-\alpha x_1^{-\rho}\,\mathrm{Ln}\, x_1 - (1-\alpha)\, x_2^{-\rho}\,\mathrm{Ln}\, x_2}{\alpha x_1^{-\rho} + (1-\alpha)\, x_2^{-\rho}}\right]}{\lim_{\rho\to 0}(-1)}$$

$$= \alpha\, \mathrm{Ln}\, x_1 + (1-\alpha)\, \mathrm{Ln}\, x_2$$

بنابراین در حد خواهیم داشت:

$$\mathrm{Ln}\, Q - \mathrm{Ln}\, A = \alpha\, \mathrm{Ln}\, x_1 + (1-\alpha)\, \mathrm{Ln}\, x_2$$

و یا

$$Q = A\, x_1^{\alpha}\, x_2^{(1-\alpha)}$$

که در واقع رابطه فوق همان تابع کاب ـ داگلاس است با قید $(1-\alpha) = \beta$.

۶ـ۳. تابع تولید اوزاوا[1]

این تابع یک تابع تولید CES تعمیم یافته است که توسط اوزاوا در ۱۹۶۱ ارائه شد که به‌صورت زیر می‌باشد:

$$Q = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = [\alpha_1 x_1^{-\rho} + \alpha_2 x_2^{-\rho} + \dots + \alpha_n x_n^{-\rho}]^{\frac{-1}{\rho}} \qquad (۱۸)$$

که در آن $x_1, x_2, \dots, x_n$ مقادیر ثابت و $\rho > -1$ است. تابع همگن از درجه ۱ و اکیداً شبه‌مقعر می‌باشد. در این تابع کشش جانشینی بین هر زوج عامل تولید یکسان است، یعنی:

$$\delta_{ij} = \delta = \frac{1}{1+\rho}$$

بنابراین، کشش جانشینی (δ_{ij}) مستقل از قیمت‌های عوامل تولید است و البته مقدار آن ثابت است. وی بعداً مدل تعمیم‌یافته‌تری ارائه داد که کشش جانشینی بین هر زوج متفاوت از دیگری باشد.

1. Uzawa.

۱-۷-۳. توابع تولید با کشش جانشینی متغیر (VES)[1]

فرض محدودکننده کشش جانشینی ثابت سبب گسترش توابع تولید در جهت کشش‌های جانشینی متغیر و سایر محدودیتها گردید که به این منظور توابع تولید متعددی ارائه گردید که در اینجا با چند نمونه از آنها آشنا می‌شویم.

۲-۷-۳. تابع تولید لیو ـ هیلدن براند[2]

این تابع توسط لیو و هیلدن براند در ۱۹۵۷ ارائه گردید و سپس توسط نادیری[3] در ۱۹۸۲ به شکل ضرایبی قابل تفسیر ارائه گردید. شکل این تابع به‌صورت زیر است:

$$Q = \alpha \, [(1 - \beta) \, x_1^{-\rho} + x_1^{-\rho\mu} \; x_2^{-\rho(1-\mu)}]^{\frac{-1}{\rho}} \qquad (۱۹)$$

ثابت می‌شود کشش جانشینی این تابع تولید، وابسته به نسبت دو نهاده بوده و بنابراین، با تغییر این نسبت، کشش جانشینی هم تغییر می‌کند.

۲-۷-۳. تابع تولید متعالی (ترنسندنتال)[4]

هالتر[5] و دیگران در سال ۱۹۵۷ تابعی را که پایه لگاریتم طبیعی به توان تابعی از نهاده‌های تولید را افزون بر جملات تابع کاب ـ داگلاس در برداشت معرفی کرده که ضمن ارتباط با تابع کاب ـ داگلاس، سه مرحله تولید نئوکلاسیک را نشان دهد و کشش جانشینی متغیر داشته باشد که به‌صورت زیر ارائه شد:

$$Q = A \, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \, e^{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2} \qquad (۲۰)$$

که در آن e پایه لگاریتم طبیعی و A، α_1، α_2، δ_1 و δ_2 پارامترهای تابع هستند.

به‌سادگی می‌توان نشان داد که نرخ نهایی جانشینی فنی عبارت است از:

$$MRTS_{x_1x_2} = \left(\left[\frac{\alpha_2}{x_2} \right] + \delta_2 \right) / \left(\left[\frac{\alpha_1}{x_1} \right] + \delta_1 \right)$$

مسیر توسعه این تابع غیر خطی است مگر اینکه $\delta_1 = \delta_2 = 0$ باشد که در آن صورت شکل

---

1. Variable Elasticity of Substitution.
2. Liu - Hildenbrand.
3. Nadiri.
4. Transcendental.
5. Halter.

تابع کاب ـ داگلاس را پیدا خواهد کرد. وقتی که δ_1 و δ_2 منفی باشد، خطوط مرزی برای این تابع وجود دارد که با محاسبه کشش‌های تولیدی نهاده‌ها و مساوی صفر قرار دادن آنها عبارتند از: $x_1=\frac{-\alpha_1}{\delta_1}$ و $x_2=\frac{-\alpha_2}{\delta_2}$ که نشاندهنده مقادیر ثابتی هستند که ارتباطی به نهاده‌ها ندارند و به‌صورت دو خط عمود بر هم رسم می‌شوند. این محدودیتی است که در مورد تابع تولید نئوکلاسیک وجود ندارد.

۳-۷-۳. تابع تولید لو ـ فلچر و دیگران

این تابع از نوع VES بوده که در سال ۱۹۶۸ توسط لو و فلچر،[1] ساتو و هافمن[2] ارائه و سپس در ۱۹۷۱ توسط ریوانکار[3] توسعه یافت. شکل این تابع به‌صورت زیر است:

$$Q = A\, x_2^{\alpha(1-\beta\mu)} \qquad [x_1 + (\mu - 1)\, x_2]^{\alpha\beta\mu} \qquad (۲۱)$$

که در آن A، α، β و μ پارامترهای تابع بوده بنحوی که α درجه همگنی تابع را نشان می‌دهد. تولیدات نهایی نهاده‌ها عبارتند از:

$$MPP_{x_2} = \frac{\alpha\,[(1 - \beta\mu)\, x_1 + (\mu - 1)\, x_2]}{[x_1 + (\mu - 1)\, x_2]} \cdot \frac{Q}{x_2}$$

$$MPP_{x_1} = \frac{\alpha\, \beta\, \mu}{[x_1 + (\mu - 1)\, x_2]} \cdot Q$$

با توجه به روابط فوق نرخ نهایی جانشینی فنی عبارت است از:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{\beta\, \mu}{[(1 - \beta\mu)\, x_1 + (\mu - 1)\, x_2]}$$

بنابراین، کشش جانشینی عبارت است از:

$$\delta = 1 + \frac{\mu - 1}{1 - \beta\mu} \cdot \frac{x_2}{x_1}$$

تابع (۲۱) تحت شرایط $\mu=1$ به صورت زیر به تابع کاب ـ داگلاس تبدیل می‌شود:

$$Q = A\, x_2^{\alpha(1-\beta)}\ x_1^{\alpha\beta}$$

1. Lu & Fletcher.

2. Sato & Hoffman.

3. Revankar.

۴-۷-۳. تابع تولید دبرتین[1]

با توجه به تابع تولید متعالی (۲۰) دیدیم که به علت کشش‌های تولیدی مستقل، دارای خطوط مرزی مستقلی برای هر نهاده می‌شد که نهایتاً به عدم انطباق با تابع تولید نئوکلاسیک منجر شد. دبرتین جهت حل این مشکل تابع متعالی را به‌صورت زیر تعمیم می‌دهد:

$$Q = A\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2}\, e^{\delta_1 x_1 + \delta_2 x_2 + \delta_3 x_1 x_2} \qquad (۲۲)$$

مقایسه تابع (۲۲) با تابع (۲۰) نشان می‌دهد که یک جمله اثر متقابل در توان به پایه لگاریتم اضافه شده است که در نهایت باعث می‌شود که کشش‌های تولیدی نهاده‌ها به مقدار یکدیگر وابستگی داشته باشد و به‌سادگی می‌توان با مساوی صفر قرار دادن کشش‌های تولیدی نهاده‌ها خطوط مرزی مربوط به هر نهاده را به صورت زیر به‌دست آورد:

$$x_1 = \frac{-\alpha_1}{(\delta_1 + \delta_3 x_2)}$$

$$x_2 = \frac{-\alpha_2}{(\delta_2 + \delta_3 x_1)}$$

طبق روابط بالا خطوط مرزی هر نهاده خطی نبوده و با افزایش مقدار نهاده دیگر افزایش می‌یابد به عبارتی دارای شیب مثبت می‌باشد.

۵-۷-۳. تابع لگاریتمی (ترنزلاگ)[2]

این تابع توسط کریستینسن، یورگنسون و لائو[3] (در ۱۹۷۳) با استفاده از تقریب کمنتا[4] در مورد تابع CES استخراج شده است. کمنتا تقریب خطی تابع CES را با بهره‌گیری از بسط تیلور[5] به صورت زیر استخراج می‌کند. این کار را با استفاده از تابع CES با درجه همگنی μ (رابطه (۱۵)) صورت می‌دهد که در نهایت داریم:

$$\mathrm{Ln}Q = \alpha + \beta_1 \mathrm{Ln}x_1 + \beta_2 \mathrm{Ln}x_2 + \beta_3 \mathrm{Ln}x_1\, \mathrm{Ln}x_2 + \frac{1}{2}\beta_4(\mathrm{Ln}x_1)^2 + \frac{1}{2}\beta_5(\mathrm{Ln}x_2)^2 \qquad (۲۳)$$

که در صورت افزودن جمله خطا به رابطه قابل تبدیل برای رگرسیون خطی خواهد بود.

1. Debertin.
2. Transcendental Logarithmic (Translog).
3. Lau, Jorgenson, Christensen.
4. Kementa Approximation.
5. Taylor Expantion.

بدیهی است اگر در تابع (۲۲) قید $\beta_3=\beta_4=\beta_5=0$ اعمال گردد به تابع کاب ـ داگلاس و اگر $\beta_4=\beta_5=-\beta_3$ باشد به تابع CES تبدیل می‌شود.

کشش جانشینی و نرخ نهایی جانشینی فنی تابع ترنزلاگ عبارت است از:

$$MRTS_{x_1x_2} = \frac{\beta_2 + \beta_3 \, Lnx_1 + \beta_5 \, Lnx_2}{\beta_1 + \beta_3 \, Lnx_2 + \beta_4 \, Lnx_1} \cdot \frac{x_1}{x_2}$$

$$\delta = [\frac{\beta_3 + \beta_4}{D_1} + \frac{\beta_3 + \beta_5}{D_2} + 1]^{-1}$$

که در آن:

$$D_1 = \frac{\beta_1 + \beta_3 \, Lnx_2 + \beta_4 \, Lnx_1}{x_2}$$

$$D_2 = \frac{\beta_2 + \beta_3 \, Lnx_1 + \beta_5 \, Lnx_2}{x_1}$$

بدیهی است که در این تابع نه تنها کشش جانشینی برابر ۱ نبوده بلکه ثابت هم نبوده و در طول منحنی تولید همسان تغییر می‌کند.

۸ـ۳. تابع تولیدتوانی تعمیم یافته (GPPF)[1]

دی جانوری[2] ارتباط بین تابع تولید کاب ـ داگلاس با کشش‌های تولیدی متغیر و تابع متعالی دومتغیره را تشخیص داد. او تابع تولید توانی تعمیم‌یافته را که تابع کاب ـ داگلاس با کشش‌های تولیدی متغیر و تابع متعالی حالت‌های خاص آن بودند به صورت زیر پیشنهاد کرد:

$$Q = x_1^{\,g[x_1,\, x_2]} \,.\, x_2^{\,h[x_1,\, x_2]} \,.\, e^{\,j[x_1,\, x_2]} \qquad (۲۴)$$

که در آن Q مقدار محصول و g، h و j هر یک تابع نهاده‌های x_1 و x_2 هستند. اگر $j=0$ باشد و $g=\alpha_1$ و $h=\alpha_2$ تابع کاب ـ داگلاس به‌دست می‌آید و اگر g و h مقادیر ثابت و j مخالف صفر باشد تابع متعالی نامقید به‌دست می‌آید. اگر j مقید به قید $j=\delta_1x_1+\delta_2x_2$ باشد تابع (۲۴) به‌صورت تابع متعالی استاندارد درمی‌آید و بالاخره اگر $j=0$ و g و h تابع x_1 و x_2 باشند، تابع کاب ـ داگلاس با کشش‌های تولید متغیر حاصل می‌شود.

1. Generalized Power Production Function. 2. De Janvry.

خلاصه و نتیجه‌گیری

در مقاله حاضر ابتدا به مبانی نظری تابع تولید نئوکلاسیک پرداخته شد و ویژگی‌های اصلی آن چون مراحل سه‌گانه تولید کشش جانشینی و خطوط مرزی بررسی شد و سپس با بررسی طیف نسبتاً وسیعی از انواع روابط جبری ارائه‌شده برای تابع تولید به مقایسه آنها پرداخته شد. بعضی از فرمها علی‌رغم پیچیدگی با واقعیت‌های بیرونی مطابقت ندارند و برخی علی‌رغم سادگی (مثل تابع تولید کاب ـ داگلاس) و داشتن محدودیت‌های آشکار از مقبولیت عمومی برخوردار هستند.

محقق بایستی بداند در برآورد تابع تولید با چه نوع محصولی روبروست و شرایط فیزیکی یا فنی موجود در فرآیند تولید چگونه است چه اطلاعات تجربی برای وی قابل کسب است تا بتواند به تشخیص تابع تولید مناسب دست بزند. در هر حال این احتمال وجود دارد که حتی بهترین تابع انتخاب‌شده از نظر برازش واقعیت‌های موجود (داده‌های آماری یا فرآیند تولید) سازگاری کامل وجود نداشته باشد.

به هر صورت هر کدام از توابع بررسی‌شده به‌سادگی می‌توانند با اضافه‌کردن جمله خطا به معادله رگرسیون جهت برآورد تبدیل شود. البته بدیهی است که تمامی روابط خطی نیستند و بنابراین، بایستی از طریق سیستم معادلات غیر خطی (NLS)[1] که در بسته‌های نرم‌افزاری مرتبط یافت می‌شود به برازش مدل‌ها اقدام نمود.

1. Non - Linear System.

فهرست منابع و مآخذ

۱. جونز، هایول، درآمدی به نظریه‌های جدید رشد اقتصادی، ترجمه صالح لطفی، چاپ اول، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۷۰.

۲. دژپسند، فرهاد و قره‌باغیان، مرتضی، بررسی تأثیر سوبسید کود در تولید محصولات استراتژیک، معاونت اقتصادی وزارت امور اقتصادی و دارایی.

3. Liu T. C., Hildenbrand G. H. "Manufacturing Production Functions in the United States, 1957", (1960)' Cornell University, School of Industrial Relations.

4. Nadiri, M. I., "Producers Theory" in HandBook of Mathematical Economics, Vol.2, ed. K. J. Arrow And M. Intrilligator (Amesterdam: North Holland, 1982), 431-90.

5. Arrow K. J., Chenery, H. B., Minhas, B. S., and Solow R. M. (1961), "Capital Labor Substitution and Economic Efficiency", Review of Economics and Statistics, Vol.43.

6. Chiang, A. C. (1984), Fundamental Methods of Mathematical Economics, 3d ed. McGrow-Hill.

7. Christensen, L. R., Jargenson, D. W., and Lau, L. J. (1993), "Transcendental Logarithmic Production Frontiers", Review of Economics and Statistics, Vol.55, PP.28-45.

8. Cobb, C. W., and Douglas, P. H. (1928), "A Theory of Production", American Economic Review, Vol.18.

9. Debertin, D. L. (1985), Agricultural Production Economics, Chicage Press.

10. Halter, A. N., Carter, H. O., and Hocking, J. O., and Hocking J. G. (1957), "A Note on the Transcendental Production Function", Journal of Farms Economics, 339.

11. Revankar, N. S. (1971), "A Class of Variable Elasticity of Substitution Production Function" Econometrica, Vol.39.

12. Uzawa, M. (1961), "Production Function with Constant Elasticity of Substitution", Review of Economics and Statistics, Vol.24.