دانش مدیریت
شماره۶۲ ـ پاییز ۱۳۸۲
ص‌ص ۶۴ ـ۵۱

استفاده از تابع توزیع احتمال در برنامه‌ریزی و کنترل پروژه

دکتر محمدعلی سوخکیان* محمد سجادیان**

چکیده

در این مقاله پس از تشریح روش پرت[1]، دلایل عدم کارایی این روش بیان می‌گردد. آن‌گاه استفاده از تابع توزیع احتمال با رویکردهای مختلف آن، به‌عنوان یک روش جدید معرفی می‌شود. این روش، نواقص روش پرت را که ناشی از فرض‌های ساده‌کننده و غیر واقعی آن است، برطرف می‌نماید. فرض‌هایی که باعث می‌شوند زمان تکمیل پروژه با استفاده از روش پرت کمتر از زمان واقعی آن تخمین زده شود.

واژه‌های کلیدی: برنامه‌ریزی[2]، کنترل پروژه[3]، روش پرت، تابع توزیع احتمال[4]، شبیه‌سازی مونت کارلو[5]، معیار بحرانیت[6].

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

---

* استادیار بخش مدیریت دانشگاه شیراز
** کارشناس ارشد مدیریت صنعتی دانشگاه شیراز

1. Project Evaluation & Review Technique
2. Planning
3. Project Control
4. Probability Distribution Function
5. Monte Carlo Simulation
6. Critical Criteria

مقدمه

پروژه به فرآیندی گفته می‌شود که در نقطه مشخصی از زمان شروع و در نقطه مشخصی از آن نیز به پایان برسد. یک پروژه زمانی به پایان می‌رسد که به هدفی مشخص، عینی و قابل ارزیابی رسیده باشد. هر پروژه در اجرا به فعالیت‌های گوناگونی تجزیه می‌شود که هرکدام از آن‌ها باید در زمان و مکان مشخص و با هزینه معین اجرا گردند.

برنامه‌ریزی شامل تعیین فعالیت‌ها و تقدم و تأخر آن‌ها، هم‌چنین تعیین میزان امکانات لازم برای اجرای آن‌ها است. برای برنامه‌ریزی پروژه از تکنیک‌ها و روش‌های مختلفی استفاده می‌شود. به‌طور کلی این روش‌ها را به دو گروه کلاسیک و مدرن می‌توان تقسیم‌بندی کرد. اگرچه روش‌های کلاسیک در مراکز صنعتی و خدماتی معمول است، ولیکن دارای نواقصی هستند که مدیریت را در عمل دچار مشکل می‌سازند. این امر پیامدهای منفی بسیاری برای پیمانکاران و برنامه‌ریزان بخش صنعت و خدمات به دنبال خواهد داشت، که از آن جمله می‌توان به پرداخت هزینه‌های دیرکرد و از دست دادن مناقصه‌های آتی به این سبب، اشاره کرد. وظیفه اصلی مدیر پروژه را می‌توان ایجاد هماهنگی لازم در اجرای فعالیت‌ها، برای کاربرد مناسب منابع و امکانات، به منظور رسیدن به هدف نهایی پروژه در زمان از پیش‌تعیین‌شده دانست.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی

روش پرت

محاسبات مربوط به تعیین زمان تکمیل پروژه پس از طراحی شبکه و مشخص شدن زمان‌های لازم برای انجام هر فعالیت، صورت می‌گیرد. گاهی، مدت اجرای فعالیت‌ها مشخص و ثابت‌اند، اما در بسیاری از مواقع، اجرای یک فعالیت در مدت زمان مشخص تحت تأثیر عوامل مختلفی قرار می‌گیرد و زمان مربوط را متغیر می‌سازد. به‌عبارت دیگر اجرای فعالیت‌ها با احتمالات توأم می‌گردد. در موقعیت‌های احتمالی، برای هر فعالیت زمان‌های مختلفی وجود دارد که هر یک از آن‌ها با احتمال مشخصی می‌توانند رخ دهند. در چنین مواقعی از روش پرت برای برنامه‌ریزی زمانی استفاده می‌شود. مبنای محاسبه زمانِ انجام و تکمیلِ پروژه در روش پرت همانند سایر روش‌های کلاسیک بر تعیین مسیر بحرانی[1] استوار است. در هر شبکه حداقل یک راه وجود دارد که شامل طولانی‌ترین زمان

1. Critical Path

است و به آن، مسیر بحرانی می‌گویند. فعالیت‌هایی که روی مسیر بحرانی قرار می‌گیرند به‌هیچ‌وجه نباید دچار تأخیر شوند. بنابراین مهم‌ترین هدف در این روش، شناخت فعالیت‌های بحرانی و تمرکز بر روی آن‌ها به‌منظور حداقل کردن زمان و هزینه کل عملیات است.

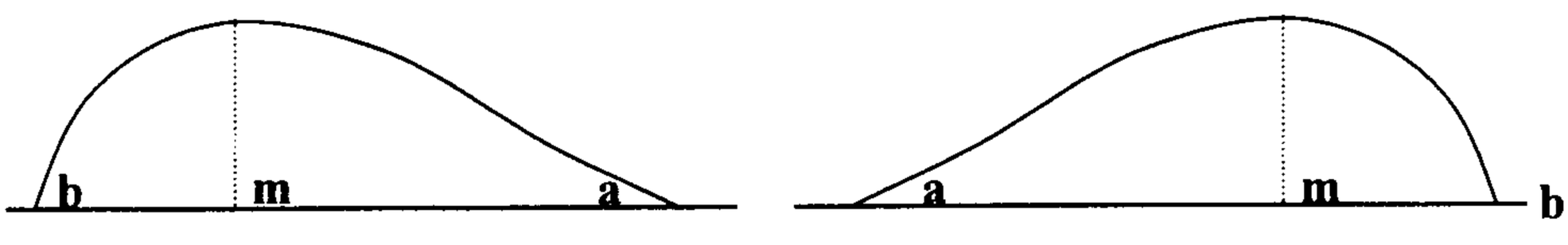
در روش پرت، برای زمان انجام فعالیت‌ها تخمین‌های احتمالی در نظر گرفته می‌شود. سه تخمین زمانی برای فعالیت‌ها به‌ترتیب زیر است:

زمان خوش‌بینانه(a): در این حالت، تخمین زمان فعالیت بر حسب کوتاه‌ترین زمان ممکن برای انجام آن فعالیت در نظر گرفته می‌شود و فرض را بر آن می‌گذارند که هیچ محدودیت و یا مشکلی درحین انجام فعالیت، اتفاق نمی‌افتد.

زمان بدبینانه(b): تخمین زمان انجام هر فعالیت در این حالت، بر حسب حداکثر زمان ممکن برای انجام آن فعالیت در نظر گرفته می‌شود و فرض را بر آن می‌گذارند که همه شرایط و عواملی که موجب تأخیر افتادن فعالیت‌های پروژه می‌شوند، اتفاق خواهند افتاد.

زمان با بیش‌ترین احتمال(m): این حالت، محتمل‌ترین زمانی است که هرکدام از فعالیت‌های پروژه تکمیل خواهند شد. به‌عبارت دیگر اگر فعالیت مزبور را در شرایط مشابه تکرار نماییم، احتمال اتفاق افتادن این زمان از بقیه زمان‌ها بیش‌تر خواهد بود.

این تخمین‌های زمانی را مدیران و یا کسانی که آشنایی کامل با فعالیت‌های پروژه دارند، انجام می‌دهند. در تخمین‌های احتمالی شبکه، هر یک از فعالیت‌ها دارای یک توزیع احتمالی بوده و برحسب این‌که مدت انجام آن فعالیت به طرف کدام‌یک از سه زمان برآوردشده (a , m, b) گرایش داشته باشد، زمان مورد انتظار (Te) به‌صورت یکی از نمودارهای زیر دیده می‌شود:



نمودار ۱.

منحنی‌های فوق شکلی از منحنی نرمال است که دارای خمیدگی به طرف راست یا چپ است و به توزیع بتا مشهور است. معمولاً توزیع بتا برای شرح تغییرپذیری تخمین زمان‌های فعالیت مورد استفاده قرار می‌گیرد. این توزیع می‌تواند بر اساس ماهیت یک

فعالیت خاص، دارای پراکندگی یا چولگی به سمت راست یا چپ باشد. میانگین و واریانس این توزیع را به‌راحتی می‌توان از تخمین‌های زمانی(a,b,m) به دست آورد. این توزیع تمرکز بالایی در اطراف زمان محتمل دارد. در تجزیه و تحلیل شبکه زمان مورد نیاز (Te) و واریانس هر فعالیت (σ^2) را می‌توان محاسبه نمود. زمان مورد انتظار هر فعالیت به‌صورت میانگین وزنی تخمین‌های سه زمان و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$Te = (a + 4m + b)/6$$ رابطه (۱)

از زمان به‌دست‌آمده، به‌عنوان زمان انجام یک فعالیت، در محاسبات مربوط به تعیین زمان تکمیل پروژه استفاده می‌شود. واریانس زمان هر فعالیت به‌صورت مربع ۱/٦ تفاوت بین تخمین‌های زمانی خوش‌بینانه و بدبینانه و به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma^2 = [b-a]^2 / ۳۶$$ رابطه (۲)

واریانس، نشان‌دهنده درجه عدم اطمینان مربوط به زمان انجام فعالیت است. هر چه مقدار واریانس بزرگ‌تر باشد، عدم اطمینان بیش‌تری نسبت به انجام فعالیت در زمان تعیین‌شده وجود دارد. به‌عنوان مثال، زمان احتمالی فعالیتی با واریانس ۱٦ دارای عدم اطمینان بیش‌تری نسبت به فعالیتی با واریانس ٦ است. برای به دست آوردن انحراف معیار زمان مورد انتظار هر مسیر نیز می‌توانیم واریانس همه فعالیت‌های واقع بر روی هر مسیر را با یکدیگر جمع زده و جذر عدد به‌دست‌آمده را با فرمول زیر محاسبه کنیم:

$$\sigma_{\text{مسیر}} = \sqrt{\text{مجموع واریانس فعالیت‌های روی مسیر}}$$ رابطه (۳)

آگاهی از زمان‌های مورد انتظار و انحراف استاندارد هر مسیر مدیریت را قادر می‌سازد تا تخمین‌های احتمالی زمان تکمیل پروژه را محاسبه نموده و مشخص نماید که آن پروژه خاص با چه احتمالی در یک مدت از پیش‌تعیین‌شده تکمیل می‌شود.

تعیین احتمال تکمیل پروژه در یک زمان معین

با استفاده از قواعد احتمالات، مدیر پروژه می‌تواند درصد اطمینان تکمیل پروژه را در زمان معین و یا از پیش‌تعیین‌شده، محاسبه نماید. با استفاده از جدول نرمال استاندارد (این جدول در اغلب کتاب‌های آمار وجود دارد)، می‌توان احتمال تکمیل پروژه را در یک زمان از پیش‌تعیین‌شده محاسبه نمود.

با استفاده از فرمول استانداردکردن فرم نرمال می‌توان این مقدار را محاسبه کرد:

رابطه (٤) $$Z = (D - T_e)/S$$

به‌طوری که:

D = زمان از پیش تعیین‌شده

T_e = زمان مورد انتظار انجام پروژه

S = مقدار انحراف معیار مسیر بحرانی

نکاتی در مورد محدودیت‌های روش پرت

در روش پرت سه زمانه، فرض‌های ساده‌کننده زیادی درنظر گرفته می‌شود که در این‌جا به چند مورد آن اشاره می‌کنیم:

۱. فرض‌هایی که مرتبط با هر فعالیت‌اند:

الف. فرض این‌که هر فعالیت دارای تابع توزیع بتا با سه زمان خوش‌بینانه، بیش‌ترین احتمال وقوع، و بدبینانه است.

ب. فرض این‌که میانگین و واریانس هر یک از فعالیت‌ها برابر است با:

$$\mu = (a + 4m + b)/6$$

$$\sigma^2 = [b - a]^2/36$$

۲. فرض‌هایی که در ارتباط با کل پروژه هستند شامل موارد ذیل‌اند:

الف. فرض استقلال زمان انجام فعالیت‌ها از یکدیگر.

ب. فرض این‌که مسیر بحرانی به‌اندازه کافی از سایر مسیرها بزرگ‌تر است و مسیر بحرانی دیگری وجود ندارد.

اکنون فرض‌های فوق را نقد می‌کنیم:

از فرض‌های۱ و ۲ نتیجه می‌شود که زمان انجام پروژه، دارای تابع توزیع نرمال است. میانگین تابع توزیع نرمال فوق برابر است با جمع میانگین زمان انجام فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی (Y_N). واریانس تابع توزیع نرمال فوق نیز برابر است با جمع واریانس فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی ($\sigma^2{}_N$). بنابراین احتمال آن‌که زمان انجام پروژه کوچک‌تر یا مساوی t باشد، به‌صورت زیر محاسبه می‌گردد:

رابطه (٥) $$\Pr[T_N \le t] = \phi[(t - Y_N)/\sigma_N]$$

در محاسبه زمان تکمیل پروژه از طریق روش پرت، تنها میانگین و واریانس زمان انجام فعالیت‌ها در نظر گرفته می‌شود. از این جهت، تابع توزیع بتا با سه زمان خوش‌بینانه، بیش‌ترین احتمال وقوع، و بدبینانه ممکن است در برخی موارد قابل کاربرد نباشد.

علاوه بر خطاهای مربوط به فرضیات فوق، اگر میانگین و واریانس زمان انجام هر فعالیت نیز، به‌طور صحیح به دست آید، در تعیین میانگین و واریانس زمان تکمیل پروژه، خطاهای مشخص دیگری ممکن است صورت گیرد. این کار به‌دلایل زیر اتفاق می‌افتد:

اول این‌که نحوه محاسبه زمان مورد انتظار و واریانس زمان هر فعالیت به‌صورت خوشبینانه(a)، با بیش‌ترین احتمال(m)، و بدبینانه(b) نمی‌تواند دربرگیرنده تمام زمان‌های احتمالی برای یک فعالیت باشد.

دوم این‌که زمان انجام هر فعالیت به‌طور قطعی برابر با مقدار مورد انتظار آن‌ها در نظرگرفته می‌شود. در نتیجه، محاسبه‌ی مسیر بحرانی پروژه به‌صورت غیر احتمالی صورت می‌گیرد، درحالی‌که زمان انجام هر فعالیت یک متغیر تصادفی است. باتوجه به این نکته، محاسبه مسیر بحرانی پروژه باید با استفاده از توزیع چند متغیر تصادفی و به‌صورت احتمالی انجام گیرد.

سوم این‌که برای به دست آوردن توزیع احتمال زمان کل پروژه در روش پرت، از قضیه حد مرکزی استفاده می‌شود. استفاده از این قضیه در صورتی صحیح است که تعداد فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی، حداقل برابر ۳۰ باشد. در پروژه‌های کوچک تعداد فعالیت‌هایی که بر مسیر بحرانی قرار می‌گیرند، ممکن است به تعداد قابل توجهی از ۳۰ کمتر باشد. پس در این‌گونه پروژه‌ها استفاده از قضیه حد مرکزی صحیح نیست. به‌جای استفاده از این قضیه، باید توزیع احتمال زمان کل پروژه را به دست آورد. توزیع احتمالی زمان کل پروژه از طریق تعیین توزیع زمان هر فعالیت روی مسیر بحرانی، و با استفاده از تئوری احتمالات به دست می‌آید.

چهارم این‌که فرض استقلال زمان انجام فعالیت‌ها از یکدیگر همیشه صادق نیست. برای تحقق این فرض، دو شرط باید وجود داشته باشد: این‌که زمان هر فعالیت، نباید تابعی از زمان فعالیت دیگر باشد؛ و هر فعالیت بایستی تنها بر روی یک مسیر قرار گیرد. این شروط در اکثر پروژه‌ها نقض شده و قابل تعمیم نیست.

در روش پرت فرض می‌شود که در شبکه‌ها تنها یک مسیر بحرانی وجود دارد و با تکمیل فعالیت‌های واقع بر روی مسیر بحرانی، پروژه نیز تکمیل می‌شود. در صورتی که

ممکن است در عمل، مسیرهای دیگری در شبکه موجود باشند که نسبت به مسیر بحرانی به زمان بیش‌تری نیاز داشته باشند. این امر منجر به این می‌شود که پروژه دیرتر از زمان انتظار، تکمیل گردد.

استفاده از تابع توزیع احتمال در تعیین زمان تکمیل پروژه

به منظور رفع محدودیت‌های تکنیک پرت، روش‌های مختلفی ارایه گردیده است. روش‌های پیشنهادشده برای شبکه‌های احتمالی را در سه گروه عمده می‌توان قرار داد. این سه گروه عبارتند از:

۱. روش‌های تحلیلی
۲. روش‌های تقریب گیری پارامترهای زمان تکمیل
۳. روش شبیه‌سازی مونت کارلو.

۱. روش‌های تحلیلی

روش‌های تحلیلی برای تعیین تابع توزیع احتمال و یا تقریب گیری آن، مورد استفاده قرار می‌گیرند. این روش‌ها به دو گروه تقسیم می‌شوند: گروه اول شامل روش‌هایی است که برای تقریب گیری توزیع زمان تکمیل پروژه ارایه شده‌اند؛ و گروه دوم در مورد ارزیابی تابع توزیع $F(t)$ مربوط است به محاسبه تخمین‌های حد بالاتر و پایین‌تر این توزیع‌ها. در عمل این روش‌ها فقط برای شبکه‌هایی کاربرد دارد که فعالیت‌های آن دارای توابع توزیع گسسته هستند.

۲. روش‌های تقریب گیری پارامترهای زمان تکمیل

یکی از روش‌ها، برای بهبود تخمین زمان در شبکه‌های پرت احتمالی، تقریب گیری توابع توزیع احتمال زمان تکمیل پروژه، از طریق توابع توزیع احتمال ساده‌تر است. برای مثال تابع توزیع احتمال را می‌توان در چند نقطه تقریب گیری کرد و از این طریق شبکه احتمالی را تا حد ممکن به یک شبکه معین تبدیل نمود.

۳. روش شبیه‌سازی مونت کارلو

در این روش برای حل مشکل فعالیت‌های مشترک در شبکه‌های پرت احتمالی از نمونه گیری استفاده می‌شود. مطلوبیت روش مونت کارلو بستگی دارد به نسبت فعالیت‌های غیر مشترک به فعالیت‌های مشترک. یک فعالیت غیر مشترک، فعالیتی است که بر روی

مسیر خاص واقع شده است. هر چه نسبت فعالیت‌های غیرمشترک به فعالیت‌های مشترک بزرگ‌تر باشد، روش مونت کارلو کاراتر خواهد بود. فرآیند شرطی کردن برای ما این امکان را فراهم می‌سازد تا بتوانیم از روش تحلیلی برای باقی‌مانده شبکه استفاده کنیم. یعنی به‌جای این‌که دقیقاً همان مقادیر نمونه روش مونت‌کارلو را مورد استفاده قرار دهیم، می‌توانیم همه اطلاعات موجود در باره‌ی توابع توزیع زمان‌های فعالیت را به‌کار بگیریم.

روش پیشنهادی جامع

همان‌طور که گفته شد کاربرد تابع توزیع احتمال جهت تخمین زمان تکمیل پروژه از مدل‌های مختلفی منتج شده است که هر کدام از آن‌ها قابلیت‌های متفاوتی دارند. روشی که در این مقاله از آن به عنوان کاربرد تابع توزیع احتمال در تخمین زمان تکمیل پروژه استفاده شده، روش پیشنهادی سوخکیان (۱۹۹۸) تحت عنوان روش پیشنهادی جامع است.

این نظریه مبتنی است بر کاهش موازی ـ سریِ مارتین[1] (۱۹۶۵)؛ در شبکه‌های پرتْ شرطی کردن راینگر[2] (۱۹۶۹)؛ و در مورد زمان‌های فعالیت‌های خاص و نمونه گیری شرطیْ شبکه‌های احتمالی گارمن[3] (۱۹۷۲). در این روش به‌جای فرض ثابت بودن زمان فعالیت انتخاب‌شده در مقادیر نمونه، فعالیت‌های انتخاب‌شده با ثابت فرض کردن متغیرهای تصادفی در زمان‌های وقوع‌شان شرطی می‌شوند. بنابراین برای شبکه‌هایی که فعالیت‌های آن به طور پیوسته توزیع شده‌اند، قدم اول در روش پیشنهادی گسسته کردن توزیع‌های پیوسته است.

در این روش ابتدا فعالیت‌های موازی و سری شبکه در هم ادغام گردیده و سپس بر روی اولین فعالیت، عمل شرطی شدن انجام می‌شود. این عمل تا زمانی انجام می‌گیرد که شبکه به یک فعالیت معادل تبدیل شود. به‌طوری‌که گره ابتدایی آن اولین گره و گره انتهایی آن آخرین گره شبکه باشد. در این حالت تابع توزیع به‌دست‌آمده، تابع زمان تکمیل پروژه است. در ادغام شبکه، دو فرآیند جمع‌زدن و بزرگ‌ترگیری همواره مورد استفاده قرار می‌گیرد. در ادامه به تشریح آن‌ها می‌پردازیم.

---

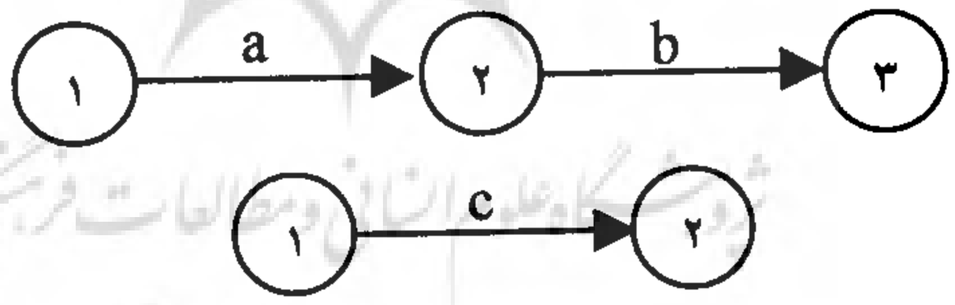
1. Martin
2. Ringer
3. Garmen

۱. عملیات جمع زدن

زمان‌های وقوع دو فعالیت سری می‌تواند با ترکیب دو فعالیت و ایجاد یک فعالیت معادل محاسبه گردد. تابع توزیع زمان فعالیت معادل برابر با مجموع تابع چگالی احتمال این فعالیت‌ها است. این عمل جمع‌زدن نامیده می‌شود. دو فعالیت (پیکان) سری را در نظر بگیرید، که در شکل (۲) نشان داده شده است. Ya و Yb را زمان‌های وقوع a و b، به‌ترتیب با تابع چگالی احتمال $Fa(t)$ و $Fb(t)$ قرار دهید. c فعالیت معادل است. اگر فعالیت a در زمان صفر شروع شود، پس زمان وقوع گره سوم متغیری تصادفی است که با Yc بیان می‌شود و برابر با است با $Yc = Ya + Yb$. تابع چگالی احتمال Yc به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

رابطه (۶) $$Fc(t) = \Pr(Yc \le t) = \int_0^t Fa(t-y)dFb(y) = Fa(t-y) * Fb(y)$$

به‌طوری که (*) یک عمل جمع زدن است. توجه کنید که با هر عمل جمع‌زدن، تعداد گره‌ها و فعالیت‌ها کاهش می‌یابد. بدین ترتیب که شبکه یک فعالیت جدید به دست می‌آورد، ولی دو فعالیت از دست می‌دهد.



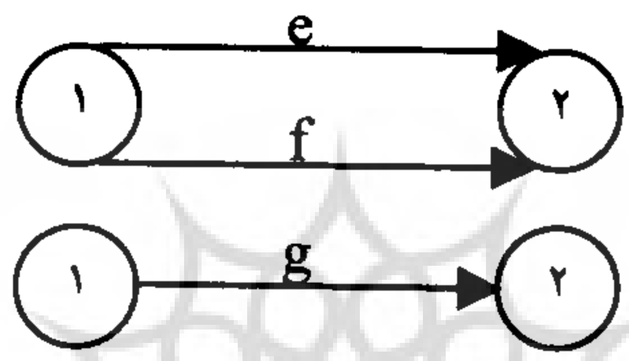
نمودار ۲. ترکیب فعالیت‌های سری **a** و **b**

۲. عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد

با حداکثر زمان وقوع دو فعالیت موازی، یک فعالیت معادل حاصل می‌گردد.تابع توزیع زمان فعالیت معادل با ضرب تابع چگالی احتمال این فعالیت‌ها به دست می‌آید. این عمل، عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد نامیده می‌شود. دو فعالیت موازی را در نظر بگیرید که در شکل (۳) نشان داده شده‌اند. Yc و Yf را زمان‌های وقوع e و f، با تابع چگالی احتمال $Fc(t)$ و $Ff(t)$ در نظر بگیرید. g فعالیت معادل است. اگر گره ۱ در زمان صفر شروع شود، در نتیجه زمان وقوع گره ۲ یک متغیر تصادفی است که با Yg نشان داده می‌شود و با $Yg = \max\{Ye, Yf\}$ تعیین می‌شود. تابع چگالی احتمال Yg به‌صورت زیر به دست می‌آید:

$$\Pr[Yg \le t] = \Pr[\max(Yc, Yf) \le t] = \Pr[Ye \le t \text{ and } Yf \le t]$$
$$= \Pr[Ye \le t] * \Pr[Yf \le t] \quad \text{با فرض استقلال}$$
$$Fg(t) = Fe(t).Ff(t) \quad \text{بنابراین:}$$

که $Fg(t)$ عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد است. در عمل انتخاب بزرگ‌ترین عدد، تعداد فعالیت‌ها به یک واحد کاهش می‌یابد. در نمودار(۳)شبکه یک فعالیت جدید به دست می‌آورد، اما دو فعالیت از دست می‌دهد.



نمودار ۳. ترکیب فعالیت‌های موازی e و f

۳. معیار بحرانیت

یکی از مفاهیم گمراه‌کننده در روش پرت قراردادی، استنباط این موضوع است که در شبکه‌های پرت تنها یک مسیر بحرانی وجود دارد. از آن‌جا که زمان تکمیل فعالیت‌ها، متغیر تصادفی با تابع توزیع پیوسته یا گسسته است، به‌طورکلی هرکدام از مسیرها بسته به مقداری که در عمل، زمان انجام هر فعالیت می‌تواند داشته باشد، می‌تواند بحرانی باشد. بنابراین برای هرفعالیت احتمالی وجود دارد که نشان‌دهنده بحرانی یا غیر بحرانی بودن آن است.

اگر P را مجموعه کلیه مسیرها در شبکه پرت در نظر بگیریم و $Z(T_1)$ مدت زمان مسیر $T_1 \in P$ باشد، پس $Z(T_1) = \sum_{(ij)\in T_1} Y_{ij}$ که Y_{ij} زمان کمان $(ij) \in A$ است. بحرانیت مسیر $T_1 \in P$ با این احتمال که زمان $Z(T_1)$ بزرگ‌تر یا مساوی با مدت زمان همه مسیرهای دیگر باشد، اندازه‌گیری می‌شود . این احتمال شاخص بحرانیت مسیر نامیده می‌شود و با CP نشان‌داده می‌شود. بنابراین برای هر مسیر $T_1 \in P$:

$$CP(T_1) = P\left[Z(T_1) \ge Z(T_q) \forall T_q \in P; T_1 \ne T_q\right]$$

شاخص بحرانیت یک فعالیت که با CA نشان داده می‌شود، با مجموع شاخص‌های بحرانیت مسیرهای شامل آن تعریف می‌شود.

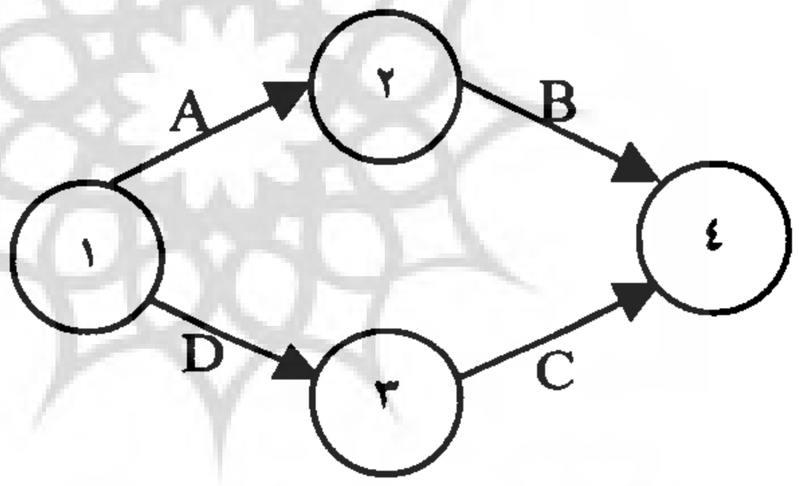
$$CA_{(ij)} = \sum_{T_1} CP(T_1)$$

بنابراین برای هر فعالیت $(ij) \in A$:

بدیهی است که هر چه $CA_{(ij)}$ بزرگ‌تر باشد، فعالیت قطعی‌تر است و بالعکس. CA معیار مفیدی برای سنجش میزان توجه به یک فعالیت است، زیرا حاوی اطلاعات بیش‌تری نسبت به مفهوم مسیر بحرانی است. مخصوصاً CAها مشخص می‌کنند که کدام فعالیت‌ها حساس‌ترند و باید سریع‌تر انجام شوند. به‌عبارت دیگر در مدل‌های تصادفی، بحرانیت یک فعالیت می‌تواند با ارزش‌تر از بحرانیت یک مسیر باشد. در قسمت زیر، روش محاسبه زمان تکمیل پروژه و معیار بحرانیت برای یک شبکه ساده ارایه می‌گردد.

۴. روش محاسبه

شبکه زیر را در نظر بگیرید. نگاره۱ نشان‌دهنده توزیع زمان انجام فعالیت‌ها است.



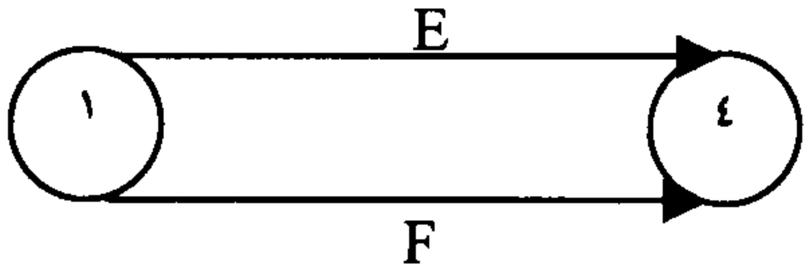
با استفاده از روش پرت مسیر (٤ـ٢ـ١) که شامل فعالیت‌های A و B است به عنوان مسیر بحرانی انتخاب می‌گردد، زیرا مجموع میانگین زمان فعالیت‌های این مسیر (١١=٦/٦ +٤/٤) از مجموع میانگین زمان فعالیت‌های مسیر دیگر (١٠/٩=١/٨+٩/١) بیش‌تر است. در حالی که محاسبات روش پیشنهادی نشان می‌دهد که بحرانیت مسیر (٤ـ٣ـ١) از دو برابر بحرانیت مسیر (٤ـ٢ـ١) که به روش پرت به‌عنوان مسیر بحرانی انتخاب شده است، بیش‌تر است.

نگاره ۱. توزیع زمان انجام فعالیت‌ها

فعالیت	زمان‌های انجام	احتمال متناظر	میانگین	واریانس
A	٤	/٦	٤/٤	/٢٤
	٥	/٤		
B	٦	/٤	٦/٦	/٢٤
	٧	/٦		
C	١	/١	٩/١	/٣٦
	١٠	/٩		
D	١	/٢	١/٨	/١٦
	٢	/٨		

روش محاسبه زمان تکمیل پروژه و معیار بحرانیت به‌طریق زیر است:

با استفاده از عملیات جمع زدن برای فعالیت‌های A و B فعالیت E، و برای فعالیت‌های C و D فعالیت F حاصل می‌شود. بعد از این ادغام شبکه به‌صورت زیر در می‌آید:



توزیع زمان انجام E و F در نگاره۲ آمده است:

نگاره ۲. توزیع زمان انجام **E** و **F**

احتمال تجمعی	احتمال متناظر	زمان‌ها	احتمال تجمعی	احتمال متناظر	زمان‌ها
۰/۰۲	۰/۰۲ = ۰/۲ × ۰/۱	۲ = ۱+۱	۰/۲٤	۰/۲٤ = ۰/٤ × ۰/٦	۱۰=٥+٤
۰/۱	۰/۰۸ = ۰/۸ × ۰/۱	۳ = ۲+۱	۰/۷٦	۰/۵۲ = ۰/٤ × ٤۰/ × ۰/٦ × ۰/٦	۱۱=۷+٤و ٦+٥
۰/۲۸	۰/۱۸ = ۰/۲ × ۰/۹	۱۱ =۱+۱۰	۱	۰/۲٤ = ۰/٦ × ۰/٤	۱۲=۷+٥
۱	۰/۷۲ = ۰/۸ × ۰/۹	۱۲ =۲+۱۰			
۰/٤۸ = واریانس E = ۱۱			۷/٤٥ = واریانس F = ۱۰/۹		

برای تعیین توزیع زمان تکمیل پروژه بایستی عملیات بزرگ‌ترگیری را بر روی توزیع زمان‌های E و F انجام داد. این عمل را در نگاره۳ ملاحظه می‌کنید.

نگاره ۳. توزیع زمان تکمیل پروژه

احتمال تجمعی	احتمالات متناظر	زمان‌ها
(۰/۲٤)(۰/۱)=۰/۰۲٤	۰/۰۲٤-۰=۰/۰۲٤	Max (۱۰,۳) =۱۰
(۰/۷٦)(۰/۲۸)=۰/۲۱۲۸	۰/۲۱۲۸-۰/۰۲٤=۰/۱۸۸۸	Max (۱۱,۱۱)۱۱
۱×۱=۱	۱-۰/۲۱۲۸=۰/۷۸۷۲	Max (۱۲,۱۲) =۱۲
۰/۲۲۸۷ = واریانس E = ۱۱/۷٦۳۲		

روش پرت میانگین زمان تکمیل پروژه را (۱۱=٤/٤+٦/٦) با واریانسی (۰/٤۸=۰/۲٤+۰/۲٤) تعیین می‌کند. در حالی که میانگین واقعی زمان تکمیل پروژه برابر E=۱۱/۷٦۳۲ و واریانس واقعی زمان تکمیل پروژه برابر ۰/۲۲۸۷ است. در روش پرت میانگین زمان تکمیل پروژه معمولاً کمتر از مقدار واقعی تعیین می‌گردد، اما واریانس زمان تکمیل پروژه بعضی مواقع بیش‌تر و بعضی مواقع کمتر از مقدار واقعی تعیین می‌گردد. محاسبه‌ها مربوط به تعیین بحرانیت مسیرها در نگاره٤ آمده است:

نگاره ۴. تعیین بحرانیت مسیرها

مسیر (۴ـ۳ـ۱)	مسیر (۴ـ۲ـ۱)	زمان‌ها
۰/۱۸×۰/۷۶=۰/۱۳۶۸ ۰/۷۲×۱ = ۰/۷۲	۰/۲۴×۰/۱=۰/۰۲۴ ۰/۵۲×۰/۲۸=۰/۱۴۵۶ ۰/۲۴×۱ =۰/۲۴	۱۰ ۱۱ ۱۲
۰/۸۵۶۸	۰/۴۰۹۶	CP
(۰/۸۵۶۸)/(۰/۴۰۹۶+۰/۸۵۶۸)=۰/۶۷۷		Normalized (CP) :(۰/۴۰۹۶)/(۰/۴۰۹۶+۰/۸۵۶۸)=۰/۳۲۳

همان‌گونه که از جدول فوق مشخص است، مجموع فراوانی‌های تجمعی (CP) از یک بزرگ‌تر است (۱/۲۶۶۴=۰/۸۵۶۸+۰/۴۰۹۶)، زیرا وقتی که زمان انجام هر دو مسیر برابر ۱۱ و یا ۱۲ است هر دو زمان بحرانی‌اند. با استاندارد کردن معیار بحرانیت‌ها جمع بحرانیت مسیرها را به یک تبدیل می‌کنیم.

همان‌گونه که در جدول مشخص است، بحرانیت مسیر (۴ـ۳ـ۱) از دو برابر بحرانیت مسیر (۴ـ۲ـ۱) بیش‌تر است. در حالی‌که به روش پرت مسیر (۴ـ۲ـ۱) به‌عنوان مسیر بحرانی تعیین می‌گردد. دلیل این موضوع این است که در روش پرت تنها از میانگین زمان انجام فعالیت‌ها برای تعیین زمان تکمیل پروژه و مسیر بحرانی استفاده می‌شود و عنصر تصادفی که واریانس زمان انجام هر فعالیت است در تعیین زمان تکمیل و مسیر بحرانی در نظر گرفته نمی‌شود. این مثال بیان می‌کند که مفهوم معیار بحرانیت برای هر فعالیت در مدل‌های تصادفی خیلی با ارزش‌تر از مفهوم معیار بحرانیت برای هر مسیر است. خصوصاً به این دلیل که مسیر بحرانی محاسبه شده به روش پرت لزوماً محتمل‌ترین مسیر بحرانی نیست.

نتیجه‌گیری

روش پرت دارای نواقصی است که باعث می‌شود زمان تکمیل پروژه کمتر از زمان واقعی آن تخمین زده شود. این امر ناشی از فرض‌های غیر واقعی است که به منظور ساده کردن محاسبات اعمال می‌شود. استفاده از تابع توزیع احتمال با تکیه بر مفهوم معیار بحرانیت روش‌هایی را برای برطرف نمودن نارسایی‌های روش پرت ارایه می‌کند. براساس روش جامع پیشنهادی، معیارِ بحرانیت برای هر فعالیت در مدل‌های تصادفی خیلی با ارزش‌تر از مفهوم معیارِ بحرانیت برای هر مسیر است، خصوصاً به این دلیل که مسیر بحرانی محاسبه‌شده به روش پرت لزوماً محتمل‌ترین مسیر بحرانی نیست.

منابع

ذهبی، اشکان (١٣٧٨). *تهیه وتدوین نرم افزار جهت تعیین زمان وتکمیل پروژه و معیارهای بحرانیت بااستفاده از الگوریتم جدید*. رساله کارشناسی ارشد، دانشگاه شیراز.

سوخکیان، محمدعلی (١٣٧٢). «روش عمومی برای ارزیابی زمان تکمیل پروژه و معیارهای بحرانیت در شبکه‌های پرت »، تهران، اولین کنگره ملی مهندسی صنایع و بهره‌وری.

Chapman, C. B. and D. F. Cooper (1983). "Risk Engineering: Basic Controlled Interval and Memory Models."*Journal of the Operational Research Society*. 34/1, 51-60.

Dodin B. M. and S. E. Almaghraby, (1985). "Approximating the Criticality Indices of the Activities in PERT Networks." *Management Science*, 31, 207-223.

Garman, M. B. (1972). "More on Conditioned Sampling in the Simulation of Stochastic Networks." *Management Science*. 19, 90-95.

Kamburowski, J. (1985). "Normally Distribution Activity Durations in PERT Networks." *Journal of OR Society*. 36, 1051-1057.

Kaplan, S. (1981). On the Method of Discrete Probability Distributions in Risk and Reliability Calculation-Application Assessment. *Risk Analysis* 1(3).

Kleindorfer, G. B. and P. R. Kleindorfer (1974). "Bounding Distributions for Stochastic Logic Networks." *Operational Research. Qual.* 25, 465-479.

Ringer, L. J. (1971). "A Statiscal Theory for PERT in Which Completion Time of Activities are Inter-Dependent." *Management Science*. 17, 717-723.

Soukhakian, M. A. (1998). *A Generalized Algorithm to Evaluate Project Completion Times and Criticality Indices for PERT Networks.* Unpublished Ph. D. Thesis, University of Southampton.