مجلّهٔ تاریخ علم، شمارهٔ چهارم، ۱۳۸۴، ص۱-۲۲

مقالهٔ تاریخی لُبِگ در انتگرال

ارسلان شادمان
استاد دانشگاه تهران، دانشکدهٔ علوم، گروه ریاضی chademan@khayam.ut.ac.ir

(تاریخ دریافت: ۸۴/۸/۱۱ ـ تاریخ پذیرش: ۸۴/۱۰/۷)

چکیده
هانری لبگ در ۱۹۰۱م مقالهٔ کوتاهی در گزارش جلسات آکادمی پاریس به چاپ رساند که مبنای رسالهٔ دکتری او قرار گرفت. این مقاله همراه با نوشته‌هایی از اِمیل بُرِل راجع به *اندازه*، نقطهٔ عطف مهمی در تحول آنالیز حقیقی به شمار می‌آید. ترجمه و شرح این مقاله، موضوع نوشتهٔ حاضر است. در این شرح به ویژه از چند منبع بهره می‌گیریم که یکی از آن‌ها حواشی سه نفر از اعضای آکادمی علوم بر چاپ جدید این مقاله در تاریخ ۲۰۰۱ م است با عنوان «گرامی‌داشت یکصدمین سال مقالهٔ لبگ».

کلید واژه‌ها: آنالیز حقیقی، انتگرال ریمان، انتگرال لبگ، انتگرال معیّن، انتگرال نامعیّن، تاریخ ریاضیات، نظریّهٔ اندازه.
رده‌بندی موضوعی: (MSC2000) 26-03, 01A55, 01A60

مقدمه

موضوع این مقاله توجه دوباره به برگی زرین از تاریخ ریاضیات معاصر است. دقیق‌تر بگوییم، بحث دربارهٔ مقاله کوتاهی است که هانری لُبِگ[1] در صفحات ۱۰۲۵ تا ۱۰۲۷ از جلد ۱۳۲ (ژانویه تا ژوئن ۱۹۰۱ م) از مجلهٔ معروف *گزارش‌های جلسات فرهنگستان علوم*[2] به چاپ رسانده است. این مقاله [Leb 1901]، با عنوان «تعمیمی از انتگرال معیّن»، به شکل یادداشت آقای ه. لبگ و با معرفی آقای پیکار[3] زیر برچسب *آنالیز ریاضی* درج شده است.

همان‌گونه که در درس‌های اواخر کارشناسی و دورهٔ تحصیلات تکمیلی رشته‌های

---

1. H. Lebesgue.
2. Comptes Rendus des séances de l’Académie des Sciences.
3. Picard.

ریاضی محض و کاربردی، آمار، علوم و مهندسی می‌بینیم، انتگرال لبگ نقش اساسی در آنالیز حقیقی ایفا نموده و توأم با نظریهٔ اندازهٔ بُرِل[1] منبع الهام پیشرفت‌های عمده‌ای در آنالیز و احتمال قرن بیستم بوده است. بخش ریاضی آکادمی علوم پاریس، به مناسب بزرگداشت یکصدمین سال انتگرال لبگ، به تجدید چاپ و تحشیهٔ این مقاله پرداخته است. حواشی و توضیحات سودمند را سه نفر از اعضای فرهنگستان، آقایان گوستاو شوکه[2]، ژان میشل بونی[3] و ژیل لُبو[4] بر عهده گرفته‌اند. این خود یک مقاله در *گزارش‌های فرهنگستان علوم پاریس*[5] با برچسب نادرِ *گرامی‌داشت* است. ما به این منبع با نشانیِ [BCL 2001] ارجاع می‌دهیم.

انگیزهٔ نگارنده از تألیف این مقاله و درج آن در *مجلّهٔ تاریخ علم* آن است که در زمینهٔ تاریخ علوم معاصر و به ویژه تاریخ ریاضیات معاصر نیز در این مجله فتح باب شود و بخشی از مجلّهٔ «پژوهشکدهٔ تاریخ علم» به این بخش از تاریخ علوم دقیقه اختصاص یابد. این بخش، از سویی ناظر به تاریخ ریاضیات و سایر علوم در جهان خواهد بود و در چارچوب فعالیت‌های پژوهشی و انتشاراتی عدیدهٔ متداول بین‌الملل قرار می‌گیرد، و از سوی دیگر، به تاریخ ریاضیات و سایر علوم در ایران و دیگر ممالک هم‌بسته با تاریخ و جغرافیای ایران خواهد پرداخت.

مقالهٔ حاضر ناظر به مبحث انتگرال در سطح جهان است.

یک منبع خوب که می‌تواند ما را به منابع غنی در زمینهٔ تاریخ ریاضیات معاصر راهنمایی کند، دو جلد کتاب *گسترش ریاضیات قرن بیستم* [Pie 1994] و [Pie 2000] است. این دو کتاب در چهار شماره از مجلهٔ *فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی* معرفی شده است، ([ش ۱۳۸۰ آ]، [ش ۱۳۸۰ ب]، [ش ۱۳۸۲] و [ش ۱۳۸۳]). برای تکمیل کوششی که در تألیف این دو مجلد به عمل آمده، پژوهشی کتاب‌شناختی لازم است تا تاریخ ریاضیات معاصر را، که در شرق و غرب منتشر شده، فهرست و به تدریج معرفی نماید.

---

1. Borel.
2. Gustave Choquet.
3. Jean-Michel Bony.
4. Gilles Lebeau.
5. Comptes Rendus de l'Académie des Science de Paris.

سازماندهی مقاله چنین است: پس از مقدمه، برگردان مقالۀ تاریخی لبگ [Leb 1901] را می‌آوریم، سپس به نکاتی از مقالۀ «گرامی‌داشت» [BCL 2001] می‌پردازیم، آن‌گاه نگاهی به مقالۀ لبگ از نظر چند منبع دیگر می‌افکنیم، و سرانجام با ارائۀ جمع‌بندی و فهرست مراجع، مقاله را پایان می‌دهیم.

برگردان فارسی مقالۀ لُبِگ

آنالیز ریاضی، *دربارۀ تعمیمی از انتگرال نامعین*، یادداشت‌های آقای ه. لبگ، با ارائۀ آقای پیکار.

در مورد توابع پیوسته، بین مفاهیم انتگرال [منظور انتگرال نامعین است، مترجم] و تابع اولی یگانگی برقرار است. ریمان، انتگرال برخی از توابع ناپیوسته را نیز تعریف کرده، اما همۀ توابع مشتق، انتگرال‌پذیر به معنای ریمان نیستند. بنابراین، مسأله جستجوی توابع اولیه به کمک انتگرال‌گیری هنوز حل نشده است و می‌توان خواهان تعریفی مناسب از انتگرال بود که از سویی انتگرال ریمان را به عنوان حالت خاص در برگیرد، و از سوی دیگر، موفق به حل مسألۀ توابع اولیه شود[۱].

برای آن که انتگرال یک تابع پیوستۀ صعودی

$$y(x) \quad (a \le x \le b)$$

تعریف شود، بازۀ (a,b) را به بازه‌های فرعی تقسیم می‌کنند و طول هر یک از بازه‌های فرعی را در مقدار y به ازای یکی از مقادیر x واقع در این بازه ضرب می‌کنند، سپس مقادیر به دست آمده را با هم جمع می‌کنند. اگر x در بازۀ (a_i, a_i+1) باشد، آن گاه y بین حدود m_i و m_i+1 خواهد بود و برعکس، اگر y بین m_i و m_i+1 باشد، آن گاه x بین a_i و a_i+1 خواهد بود. بدین ترتیب، به جای آن که تقسیم‌بندی را روی تغییرات x انجام دهیم، یعنی به جای آن که به اعداد a_i توجّه کنیم، می‌توانستیم تقسیم‌بندی را روی تغییرات y در نظر بگیریم، یعنی به اعداد m_i توجّه نماییم.

۱. [زیرنویس از اصل مقاله است] دو شرط فوق که پیشاپیش برای هر گونه تعمیم انتگرال منظور می‌شوند، با هم سازگارند زیرا هر تابع مشتق که به معنای ریمان انتگرال‌پذیر باشد، یکی از توابع اولیۀ خود را به عنوان انتگرال می‌پذیرد.

می‌دانیم شیوهٔ نخست (یعنی توجه به a_i ها) به تعریفی می‌انجامد که ریمان از انتگرال به دست داده و انتگرال‌های بالایی (اضافی) و پایینی (نقصانی) را که داربو[1] مطرح کرده، در پی دارد. اکنون شیوهٔ دوم را ببینیم:

فرض کنیم تابع y بین m و M باشد؛ با در نظر گرفتن

$$m = m_{\circ} < m_{۱} < m_{۲} < ... < m_{p-۱} < M = m_p ,$$

فرض کنیم مقدار $y = m$ زمانی اتخاذ شود که x به یک مجموعهٔ $E_{\circ}$ تعلّق دارد و مقادیر $m_i - ۱ < y \leq m_i$ هنگامی گرفته شود که x به یک مجموعهٔ E_i متعلق است.

اندازهٔ این مجموعه‌ها را که به ترتیب $\lambda_{\circ}$ و λ_i می‌نامیم، اندکی بعد تعریف خواهیم کرد. هر یک از دو حاصل‌جمع زیر را در نظر بگیریم:

$$m_{\circ}\lambda_{\circ} + \sum m_i\lambda_i \quad , \quad m_{\circ}\lambda_{\circ} + \sum m_i - ۱\lambda_i ;$$

اگر هر وقت که بیشترین مقدار اختلاف بین دو m_i متوالی به صفر میل کند، دو حاصل‌جمع فوق به یک حد مشترک همگرا شوند، و این حد مشترک، مستقل از انتخاب m_i ها در بازهٔ $[m, M]$ باشد، آن گاه طبق تعریف، آن حد مشترک را انتگرال مقادیر y می‌نامیم و می‌گوییم تابع y انتگرال‌پذیر است.

یک مجموعه از نقاط بازهٔ (a,b) را در نظر بگیریم؛ می‌توان این نقاط را به بی‌نهایت شکل در یک مجموعهٔ نامتناهی شمارا از بازه‌ها محاط کرد. حد پایینی حاصل‌جمع طول‌های این بازه‌ها، اندازهٔ این مجموعه است. یک مجموعهٔ E را *اندازه‌پذیر* می‌نامیم، اگر اندازهٔ آن به اضافهٔ اندازهٔ مجموعهٔ نقاطی از (a,b) که به E تعلق ندارند، درست برابر با اندازهٔ (a,b) باشد[2]. دو ویژگی از ویژگی‌های این مجموعه‌ها چنین است: با در دست داشتن بی‌نهایت [شمارا] مجموعهٔ اندازه‌پذیر E_i، مجموعهٔ نقاطی که دست‌کم به یکی از آن مجموعه‌ها تعلق دارند، مجموعه‌ای است اندازه‌پذیر؛ اگر مجموعه‌های E_i دو به دو نقطهٔ مشترک نداشته باشند، آن گاه اندازهٔ مجموعه‌ای که به شکل پیش حاصل می‌شود، حاصل‌جمع اندازه‌های E_iها است. مجموعهٔ نقاط مشترک همهٔ E_i ها اندازه‌پذیر است.

1. Darboux.

۲. اگر مجموعه‌های با اندازهٔ صفر را که به شیوهٔ مناسبی انتخاب می‌شوند به این مجموعه‌ها بیفزاییم، مجموعه‌های اندازه‌پذیر به معنای آقای بُرل حاصل می‌شود (به کتاب بُرل *درس‌هایی در نظریهٔ توابع* مراجعه شود).

طبیعی است که نخست توابعی را در نظر بگیریم که برای آن‌ها مجموعه‌های مطرح شده در تعریف انتگرال، مجموعه‌هایی اندازه‌پذیر باشند. چنین می‌یابیم: اگر قدر مطلق یک تابع y از بالا کراندار باشد و به علاوه، این تابع به گونه‌ای باشد که به ازای هر A و B، مجموعهٔ مقادیر x که مقادیر نظیر آن‌ها در شرط $A < y \leq B$ صدق کند، مجموعه‌ای انتگرال‌پذیر باشد، آن گاه این تابع انتگرال‌پذیر به شیوهٔ مطرح شده است. چنین تابعی را جمع‌پذیر می‌نامیم. انتگرال یک تابع جمع‌پذیر بین انتگرال نقصانی و انتگرال اضافی محصور است. به این ترتیب، می‌بینیم که، اگر یک تابع انتگرال‌پذیر به معنی ریمان، به معنی فوق جمع‌پذیر نیز باشد، آن گاه انتگرال تابع به هر دو معنی یکسان است. و اما، هر تابع انتگرال‌پذیر به معنی ریمان، یک تابع جمع‌پذیر است، زیرا مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی آن، یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر است و می‌توان نشان داد که اگر یک تابع خارج از یک مجموعه با اندازهٔ صفر پیوسته باشد، آن گاه این تابع جمع‌پذیر است. به کمک این ویژگی، می‌توان بی‌درنگ توابعی ساخت که انتگرال‌پذیر ریمان نباشد ولی جمع‌پذیر باشند. گیریم $f(x)$ و $\varphi(x)$ دو تابع پیوسته باشند و $\varphi(x)$ همواره صفر نباشد. یک تابع در نظر بگیریم که همه جا با $f(x)$ برابر باشد جز در نقاط یک مجموعهٔ همه جا چگال و با اندازهٔ صفر و در نقاط این مجموعه برابر با $f(x)+\varphi(x)$ باشد. در این صورت، تابع به دست آمده جمع‌پذیر است اما انتگرال‌پذیر به معنی ریمان نیست. مثال: تابع برابر با ۰ اگر x گویا نیست و برابر با ۱ اگر x گویاست. فرایند تشکیل توابع به شیوهٔ فوق نشان می‌دهد که مجموعهٔ توابع جمع‌پذیر، توانِ بالاتر از توان پیوسته دارد. اکنون دو ویژگی توابع جمع‌پذیر را مطرح می‌کنیم:

- اولاً اگر f و φ جمع‌پذیر باشند، آن گاه $f+\varphi$ و $f\varphi$ نیز جمع‌پذیرند و انتگرالِ $f+\varphi$ با حاصل‌جمع انتگرالِ f و انتگرالِ φ برابر است.
- ثانیاً، اگر دنباله‌ای از توابع جمع‌پذیر دارای یک حد باشد، آن گاه تابع حد نیز جمع‌پذیر است.

آشکارا مجموعهٔ توابع جمع‌پذیر شامل توابع $y=k$ و $y=x$ نیز هست و لذا، بنا بر اولاً، همهٔ چندجمله‌ای ها را نیز در بر دارد، و چون با توجه به ثانیاً، حدهای چند جمله‌ای‌ها را نیز در بردارد، لذا همهٔ توابع پیوسته را نیز در بردارد و همهٔ حدهای توابع

پیوسته، یعنی همهٔ توابع از ردهٔ نخست را نیز شامل می‌شود (رجوع شود به مقالهٔ بِر[۱])، همچنین همهٔ توابع ردهٔ دوم و غیره را نیز در بردارد.

به ویژه هر تابع مشتق که از حیث قدر مطلق کراندار باشد، چون از ردهٔ نخست است، تابعی است جمع‌پذیر و می‌توان نشان داد که انتگرال آن، به عنوان تابعی از متغیرِ کنارهٔ بالای انتگرال، یکی از توابع اولیهٔ تابع مفروض است.

اکنون به یک کاربرد هندسی می‌پردازیم: اگر $|f'|$ و $|\varphi'|$ و $|\psi'|$ از بالا کراندار باشند، آن گاه طول خم

$$x = f(t),\ \ y = \varphi(t),\ \ z = \psi(t)$$

برابر است با انتگرال $\sqrt{f'^{۲} + \varphi'^{۲} + \psi'^{۲}}$. اگر $\varphi = \psi = \circ$، آن گاه تغییراتِ کُلّی تابعِ f به دست می‌آید که البته، تابعی است با تغییرات کراندار. در حالتی که f' و φ' و ψ' وجود نداشته باشند، به قضیهٔ مشابهی می‌رسیم مشروط بر آن که به جای مشتق، از اعداد مشتقِ دینی[۲] استفاده کنیم.

نکات اصلی مقالهٔ «گرامی‌داشت»

مقالهٔ [BCL 2001] که در «بزرگداشت صدمین سال انتگرال لبگ» نوشته شده است، با این چکیدهٔ روشن به امضای سیارله[۳] و مالگرانژ[۴] آغاز می‌شود: «به ابتکار بخش ریاضی آکادمی، [نشریهٔ] *گزارش‌ها* آرزومند است خاطرهٔ انتشار نخستین یادداشت لبگ راجع به نظریهٔ انتگرال را گرامی بدارد. همکاران ما ژ. م. بونی، گ. شوکه و ژ. لُبو توضیحات و حاشیه‌نویسی را تقبل فرمودند. به این خاطر از ایشان صمیمانه سپاسگزاریم.»

متن گرامی‌داشت مشتمل است بر مقدمه (یک صفحه بدون عنوان)، اصل مقاله (با همان شکل و شمایل صد سال پیش)، و پس از آن، توضیحات در چهار بخش کوتاه:

۱. بلاغت،

1. Baire R., *Annali di Matematicae*, 1899
2. Dini
3. Ph. G. Ciarlet
4. B. Malgrange

۲. انتگرال،
۳. اندازه،
۴. نکات تاریخی.

نکاتی از مقدمه

اگر شوکه به تنهایی هم چند سطر دربارهٔ موضوع می‌نوشت، سندیت او برای جامعهٔ ریاضی در جهان کافی بود تا این جمله‌های آغازی مقدمه، به عنوان یک واقعیت تاریخی تلقی شود: « بیش از صد سال از تولدِ زوجِ (اندازه، انتگرال) نمی‌گذرد، زوجی که اندکی پس از ظهور، به پایهٔ خلل‌ناپذیر آنالیز ریاضی تبدیل شد. اگر قرار می‌بود تنها صفحات بنیانگذار این دو ابزار را به خاطر بسپاریم، ناچار برای اندازه صفحات ۴۶ تا ۵۰ از کتاب *درس‌هایی در نظریهٔ اندازه* تألیفِ امیل بُرِل [Bor 1898]، و در مورد *انتگرال*، یادداشت هانری لبگ [Leb 1901] را در نظر می‌گرفتیم.»

سپس، با نقل قول‌هایی از برل در چاپ‌های بعدی کتاب فوق (تا ۱۹۱۴)، یادآوری می‌شود که آثار لبگ، در برهان ریزه‌کاری‌هایی از نظریهٔ اندازهٔ برل هم، («غیر مستقیم») دخیل بوده است.

این سخنان مقدمه در توجیه گرامی‌داشت است، جایی که می‌گوید: «لذا وقت آن رسیده است که در ۲۹ آوریل ۲۰۰۱، یادداشت لبگ را صد سال پس از انتشار آن، گرامی بداریم و در معرض دید خوانندگان قرار دهیم. این یادداشت از این نظر هم قابل توجه است که مشکل بتوان با کلماتی کمتر از آن به روشنی گفت که یک مجموعهٔ اندازه‌پذیر چیست و اندازهٔ آن کدام است.»

صنایع بلاغت

در بخش یکم توضیحات، بلاغت، یا بهتر بگویم صنایع بلاغت، ضمن تأکید دوباره بر این موضوع نکتهٔ مهمی بیان می‌شود: « این یادداشت در کمتر از سه صفحه گنجانده شده است، و می‌توانست حتی کمتر هم باشد، اگر لبگ در نهایت مراقبت سعی نکرده بود که افکار انقلابی او کاملاً طبیعی و مقدماتی جلوه کند. او ۱۳ سطر از یادداشت‌هایش

را به انتگرال توابع پیوستهٔ یکنوا اختصاص می‌دهد، که البته این کار را نه به خاطر فایدهٔ ریاضی این توابع، بلکه ازآن رو انجام داده است که تنها موردی است که فرایندِ جدیدِ انتگرال‌گیریِ او با فرایندِ ریمان مطابق است.»

نویسندگان بزرگداشت، زیبایی‌های دیگری را هم، از حیث بلاغت و فصاحت، به ویژه ایجاز، سادگی و طبیعی بودن، در یادداشتِ لبگ می‌بینند و به ما نشان می‌دهند. هم چنین، این مطلب که «یادداشت، نه تنها انتگرال و اندازه را با روشی کاملاً ساده و طبیعی ارائه می‌کند، بلکه به مفهومِ *توابعِ جمع‌پذیر* و انتگرالِ آن‌ها هم می‌رسد. البته، پس از وضع مفهوم، باید برخی از ویژگی‌های شگفت‌انگیز آن‌ها نیز بیان شوند» (که در آثار لبگ بعد از یادداشت ارائه شده‌اند).

نکاتی از انتگرال

در این بخش، با یک نقد ارزشمند روبرو هستیم. از سویی، نوآوری مفهومیِ یادداشت در یکی از دو زمینهٔ مهم مورد بحث، به درستی مورد تأکید قرار گرفته است، و از سوی دیگر، ناتوانمندی عمدهٔ انتگرال لبگ در حل کامل *مسألهٔ توابع اولیه* و برخورد او با توابع بیکران («این توابع لعنتی») مسکوت نمانده است.

در مورد نخست، اگر f یک تابع کراندار باشد و مقادیرش را در بازهٔ (m,M) بگیرد، آن گاه تقسیم‌بندی این بازه به این برمی‌گردد که مجموعهٔ متغیرها، در اینجا (a,b)، به تعدادی متناهی مجموعه افراز شود و f در هر یک از این مجموعه‌ها تقریباً ثابت باشد. حال اگر بتوانیم اندازهٔ این مجموعه‌ها را تعریف کنیم، به گونه‌ای آشکار مقادیر تقریبی انتگرال را به دست می‌آوریم و وجود حد این مقادیر تقریبی هم بدون ابهام خواهد بود. پس تنها قیدی که باید مراعات شود، آن است که در مورد اندازهٔ مجموعه‌ها به تفاهم برسیم.

مزایای متعددی در این مفهوم نو نهفته و آشکار است: از جمله مزایای بدیهی آن، یکی این است که توابع بیشتری از توابع انتگرال‌پذیر ریمان را دربرمی‌گیرد. یکی دیگر آن که، برای توابع کراندار، مسألهٔ جستجوی توابع اولیه برای توابع مشتق کراندار را حل می‌کند:

قضیه. *اگر F در هر نقطهٔ (a,b) مشتق داشته باشد و تابع مشتق، F' ، روی (a,b) کراندار باشد، آن گاه F' نه تنها انتگرال لبگ دارد بلکه جمع‌پذیر است و توابع F و $\int_a^x F'(t)\ dt$ جز در یک ثابت با هم اختلاف ندارند.*

قضیهٔ مشابه برای انتگرال ریمان برقرار نیست. پس این امتیاز واقعی است و برای انگیزهٔ لبگ در ابتدای یادداشت، جواب نسبتاً قانع‌کننده‌ای فراهم می‌کند.

از جمله مزایای پنهان آن، یکی پایداری مفهوم در مسائل گذر به حد است، قضایای همگرایی معروفی که مشهورترین آن قضیهٔ تسلطی لبگ است و در رسالهٔ دکترایش سال بعد از یادداشت ارائه شد. اما مهمترین مزیت انتگرال لبگ، *قضایای کمال* در مورد فضای L^1 و سایر فضاهای L^p است که چند سال بعد از یادداشت لبگ، توسط ریاضی‌دانانی نظیر فردریک ریس[1] و فیشر[2] در ۱۹۰۷، کشف شد. اینجا مزیت انتگرال لبگ بر انتگرال ریمان فوق‌العاده است. بدون شک، کشف ریس ـ فیشر، که بر پایهٔ انتگرال لبگ بنا شد، مبنای تحول عظیم و رشد آنالیز تابعی در طول قرن بیستم گردید، اعم از تئوری فضاهای هیلبرت و باناخ، فضای سوبولف و غیره. در بخش نکات تاریخی توضیحات بیشتری در این زمینه می‌آید.

در مورد دوم، یعنی نقطه ضعف لبگ در مورد توابع بیکران، دو مطلب مهم باید گفته شود: مطلب اول آن است که لبگ بر توابع کراندار تسلط کافی دارد و در مورد توابع بیکران دچار بن‌بست‌های جدی است و خود او به این مسأله تا اندازه‌ای آگاه است، همان‌گونه که در نامه‌ای به بُرِل در ۱۹۰۵ اقرار می‌کند: «حمله به [مسائل] این توابع لعنتی چه قدر دشوار است.»

اما از نکات جالب این تحلیل آن است که، صرف‌نظر از قوت و ضعف خود لبگ، به صراحت تأکید می‌کند: (نقل قول به مضمون) «اساساً انتگرال لبگ برای حل مسألهٔ تابع اولی در حالت کلی (شامل کراندار و بیکران) کافی نیست. در ۱۹۱۲ دانژوا[3] توانست با ارائهٔ مفهومی جدید (totalisation) به حل کامل مسأله دست یابد که البته مرحلهٔ اول

1. Riesz
2. Fischer
3. Denjoy

کار دانژوا هم متکی بر انتگرال لبگ است.»

یکی دیگر از مطالب پراهمیت در فرایند انتگرال لبگ آن است که او، بر خلاف ریمان و بسیاری دیگر از پیشینیان و حتی هم دوره‌هایش، انتگرال خود را بر توپولوژی و رابطهٔ ترتیب بنا نمی‌کند، بلکه نقش عمده را به ویژگی *جمع‌پذیری شمارا* در مورد اندازه می‌دهد. اکنون بیشتر به این مسأله خواهیم پرداخت.

نکاتی از اندازه

هر چند بُرِل را بنیانگذار نظریهٔ اندازه می‌شمارند، نباید از نظر دور داشت که در همین یادداشت کوتاه لبگ، یک فکر انقلابی راجع به اندازه هم دیده می‌شود. اندازه‌ای که او در این مقاله تعریف می‌کند، همان است که در رساله‌اش به نام *اندازهٔ بیرونی* مطرح می‌کند، و امروز هم به همین نام شناخته می‌شود. تعریفی که لبگ در این یادداشت از مجموعهٔ *اندازه‌پذیر* می‌دهد به آن برمی‌گردد که بگوییم مجموعهٔ مورد بحث دارای اندازه‌های بیرونی و درونیِ برابر است. حال آن که برل نهایتاً به مجموعه‌هایی که ما امروز *مجموعه‌های بُرِلی* می‌نامیم پرداخته است. این هم، به شرط آن که محاسبات طولانی و ملال‌انگیزی را، که ملزوم مفهوم این مجموعه‌ها و اندازهٔ آنها بود، از قلم نمی‌انداخت. او اینها را غالباً به خواننده واگذار می‌کرد، یا به کارهای لبگ ارجاع می‌داد. مجموعه‌های اندازه‌پذیر لبگ از سویی مجموعه‌های برلی را دربرمی‌گیرد و از سوی دیگر برای عملیات مجموعه‌ای شمارا پایدار است. تفاوت این دو دسته مجموعه در یادداشت لبگ به روشنی بیان شده است، یک مجموعهٔ با اندازهٔ صفر باید افزوده یا کاسته شود تا از یکی به دیگری برسیم.

بعدها لبگ دامنهٔ مفهوم اندازه را به چند متغیر حقیقی نیز گسترش داد [Leb 1910]، و پس از او، تا تاریخ ۱۹۳۳ که نظریهٔ مجرد احتمالات کولموگوروف[1] ارائه شد، دیگران، به ارائهٔ صورت‌هایی دیگر از گسترش این مفهوم پرداختند. اهمیت کار لبگ، در تأثیرگذاری روی این تحولِ مهم، در خورِ توجّه است.

---

1. Kolmogoroff

جنبش توسعهٔ افکار، هم از حیث خودِ توسعه، و هم از حیث الزام‌های ناشی از کاربرد نظریه‌های دیگر، حائز اهمیت است. در مورد نظریهٔ اندازه، مفاهیم و روش‌های آن، این نهضت ادامه داشته و هنوز هم دارد. از جمله، نظریهٔ توزیع لوران شوارتس، و نظریهٔ ظرفیت مجرد گوستاو شوکه (که بخشی از نظریهٔ پتانسیل است)، از وارثان دوردست‌ترِ نظریهٔ اندازهٔ لبگ هستند. تاریخچهٔ جالبی از نظریهٔ پتانسیل در [Bre 1970] اثر مارسل برلو دیده می‌شود. متقابلاً، شوکه زندگی و آثار مارسل برلو را، پس از وفات او، به شکل زیبایی معرفی کرد.

نکات تاریخی

با نهایت اختصار، داده‌های زیر از زندگی هانری لبگ گزارش می‌شود: تولد او ۲۸ ژوئن ۱۸۷۵(تیر ماه ۱۲۵۴) در شهر بووِه[1]، تحصیلات او ۱۹ تا ۲۲ سالگی در دانشسرای عالی پاریس، اخذ مدرک دکتری در علوم در سن ۲۷ سالگی، عضویت آکادمی علوم در پاریس در سن ۴۷ سالگی و سرانجام وفات در ۲۶ ژوئیهٔ ۱۹۴۱ (مرداد ماه ۱۳۲۰).

توضیحات بیشتر و کلیهٔ مدارک مربوط به پیدایش انتگرال لبگ را می‌توان در دو منبع زیر مطالعه کرد:

- مجموعهٔ آثار لبگ (پنج مجلد) که در شماره‌های ویژهٔ مجلهٔ *آموزش ریاضی*[2] چاپ ژنو منتشر شد،
- *نامه‌های لبگ به برل* در فاصلهٔ سال‌های ۱۹۰۱ تا ۱۹۱۴ که در مجلهٔ *نشریهٔ سمینار تاریخ ریاضیات*[3] به همت پیر دوگا[4] و برنار برو[5] چاپ شد.

از بین آن‌ها، به ویژه روز شمار وقایع، به همت پُل مُنتِل[6] و آرنو دانژوا[7]، و چهار مقالهٔلبگ در سن ۲۴ و ۲۵ سالگی که به شکل یادداشت در گزارش‌های آکادمی علوم

1. Beauvais
2. L’enseignement mathématique
3. Cahiers du séminaire d’histoire des mathématiques
4. Pierre Dugac
5. Bernard Bru
6. Paul Montel
7. Arnaud Denjoy

(سال‌های ۱۸۹۹ و ۱۹۰۰) به چاپ رساند، و همچنین مقالهٔ مبسوطی که در ۱۹۱۸ به عنوان *ملاحظاتی در باب نظریهٔ اندازه و انتگرال* منتشر ساخت، حائز اهمیت‌اند. «بنا بر این مدارک، کاملاً معقول و هماهنگ به نظر می‌رسد که ریشهٔ افکار لبگ به زمان تحصیل او در دانشسرای عالی برمی‌گردد، زمانی که به عنوان یک دانشجوی جوان در جستجوی ابزاری بود تا به وسیلهٔ آن بتواند به بررسی رویه‌هایی بپردازد که هر چند شامل هیچ خط مستقیمی نیستند، اما قابلیت آن را داشته باشند که روی یک صفحه گسترده شوند.»

مقالهٔ لُبِگ در منابع دیگر

از بین منابع عدیده‌ای که، به جهت ماهیت موضوع و اهمیت مقالهٔ مورد بحث، تعدادشان بیرون از حد است، به سه منبع اکتفا می‌کنیم:

- بورباکی ([Bou 1960], [Bou 1984], [Bou 1994])
- بویر ([Boy 1968])
- پیِه ([Pie 1994a], [Pie 1994 b])

یادداشت‌های تاریخی بورباکی

آشنایی مختصر با مرجع

هر چند مرجع مورد نظر ما ([Bou 1994]) تاریخ چاپ ۱۹۹۴ دارد، از نظرِ تاریخِ انتشارِ چاپِ نخست ([Bou 1960])، این منبع بر دو دیگر سبقت می‌گیرد. برای اطلاعِ خوانندگانِ تاریخ علم، لازم است توضیح دهم که گروهِ نویسندگان با نامِ مستعارِ نیکُلا بورباکی[1] از ۱۹۳۵ در فرانسه تشکیل گردید. این گروه، متشکل از ریاضی‌دانان جوانی است که به محض رسیدن به سن ۵۰ سالگی از گروه بیرون می‌روند و جای خود را به افرادی از نسل جدید می‌دهند. نام اعضای این گروه، ظاهراً محرمانه بود، اما دیری نپایید که نام افراد نسل اول و نسل‌های متوالی پس از آن بر همگان آشکار شد.

1. Nicolas Bourbaki

به اتفاق آرای صاحبنظران، ریاضیاتِ قرنِ بیستم تحتِ نگرش و نگارشِ بورباکی قرار داشته است. اما بحث‌های داغی هم به سود و به زیان این گروه در طول نیمهٔ دوم قرن بیستم رواج داشت. بگو مگوها بیشتر ناظر به شیوهٔ ارائهٔ انتگرال بوده‌اند که اساساً مبتنی بر انتگرال لبگ است (مقدمهٔ [Pie 2000] دیده شود)، اما تحلیلِ تاریخِ انتگرال از دید بورباکی، تا آنجا که نگارنده اطلاع دارد، موضوع جدل خاصی نبوده است.

دورهٔ ریاضیات بورباکی، که این گروه از ۱۹۳۹ تا حوالیِ ۱۹۸۳ تدوین کرد، بالغ بر ۱۵۰۰۰ صفحه است. این دوره اساساً دو بخش است: بخش اول **مقدماتِ آنالیز** شامل شش کتاب است (**مجموعه‌ها، جبر، توپولوژی، فضاهای بُرداریِ توپولوژیک، توابع یک متغیر حقیقی، انتگرال**) که هر کدام به تدریج در چند جلد چاپ و بارها تجدید چاپ شد و هنوز هم گاه و بیگاه چاپ‌های جدید آن ظاهر می‌شود؛ قسمت دوم نیز شامل چند کتاب است (**خمینه‌های دیفرانسیل، جبر جابجایی، گروه‌ها و جبرهای لی، نظریهٔ طیفی**، ...). بحث تاریخ «زندگیِ بورباکی» در حوالی سال ۲۰۰۰ موضوع مقالات متعدد قرار گرفته است. از جمله، پیِر کارتیه[1] در ۱۸ ژوئن ۱۹۹۷ مقاله‌ای به شکل مصاحبه با عنوان «سکوت ممتد بورباکی[2]» برای چاپ در بخش *جوامع ریاضی*[3] به مجلّهٔ **متماتیکال اینتلیجنسر**[4] سپرد که در ژانویهٔ ۱۹۹۸ آن منتشر شد ([Car 1998]). این مقاله همراه با «پیوست» جالبی زیر عنوان «یادداشتی راجع به بورباکی» در ماه اوت ۱۹۹۷ در مؤسسهٔ معروف IHES حروف‌نگاری شد که اخیراً به دست نگارنده رسیده است. اطلاعات سودمندی راجع به آثار بورباکی در بر دارد.

از ویژگی‌های جالب این کتاب‌ها در رابطه با تاریخ علم، تذکر دو نکته را سودمند می‌بینم: نکتهٔ یکم این است که یادداشت‌های تاریخی بر مباحث مندرج در این کتاب‌ها نوشته شده و در پایان کتاب، یا پایان برخی فصل‌های کتاب، آمده‌اند، نکتهٔ دوم آن که برای تعدادی از کتاب‌ها، کتابچهٔ خلاصه (مجلّدِ نتایج[5]) تدوین شده که برای مصرف

1. Pierre Cartier
2. The Continuing silence of Bourbaki
3. Mathemathical Communities
4. The Mathemathical Intelligencer
5. Fascicule des résultats

ریاضی‌دانان (و غیر ریاضی‌دانان) منتشر شده‌اند. نخستین مجلّدِ نتایج با عنوان **نظریّهٔ مجموعه‌ها ـ کتابچهٔ خلاصه (مجلّدِ نتایج)** چاپ ۱۹۳۹ در فهرست یکی از وقایع مهم ریاضی از ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ تلقّی شده است [Pie 1994].

باید افزود که در ایران هم، به مناسبتِ فعالیت‌های سال جهانیِ ریاضیات، ترجمهٔ فارسی کتابچه‌های خلاصهٔ بورباکی مورد توجّه قرار گرفت و به انجام رسید، که در پنج جلد کم حجم از سلسله انتشارات دانشگاه تهران طراحی شد. چهار جلد آن منتشر شد ([بور ۱۳۷۹]، [بور، ۱۳۸۰، آ]، [بور ۱۳۸۰، ب]، [بور ۱۳۸۱]) و جلد آخر [بور ۱۳۸۵؟] در دست انتشار است. از این میان، [بور ۱۳۸۰، آ] و [بور ۱۳۸۰، ب] یادداشت‌های تاریخی را نیز در بردارد.

بورباکی در ۱۹۶۰، تقریباً هم‌زمان با پایان گرفتن چاپ بخش یکمِ دورهٔ ریاضیاتِ بورباکی، یادداشت‌های تاریخیِ نامبرده را، گرد هم آورده و به شکل یک کتاب با عنوانِ **مقدمات تاریخ ریاضیات**، نزد هرمان (ناشر کتاب‌هایش تا آن زمان)، و با شمارهٔ ۴ از مجموعهٔ تاریخ اندیشه منتشر می‌کند ([Bou 1960]). بعداً در تجدید چاپ‌های بعدی، از جمله ([Bou 1984]، فصل مربوط به انتگرال که در چاپ ۱۹۶۰ فصل آخر بود، با تجدید نظر و مراجع به روزتر، به بخش ۲۲ تبدیل می‌شود، و عنوان قبلی **انتگرال** به عنوان جدید **انتگرال روی فضاهای موضعاً فشرده** تبدیل می‌شود. حال آن که تعدادی از قسمت‌های بعدی نیز راجع به انتگرال هستند. ترجمهٔ انگلیسیِ [Bou 1984] ده سال بعد به شکلِ [Bou 1994] منتشر شد. ما از متنِ اصلی فرانسهٔ [Bou 1960] و انگلیسی [Bou 1994] استفاده می‌کنیم و منظورمان از «این مرجع» همین مرجع اخیر است.

اثر لبگ در این مرجع

در این مرجع، اشارهٔ مستقیم به مقالهٔ مورد بحث یعنی [Leb 1901] نمی‌شود. ولی در بخش ۲۲ آن به تفصیل، و در آغاز بخش ۲۳ (اندازهٔ هاآر. پیچش[1]) و بخش ۲۴ (انتگرال روی فضاهایی که موضعاً فشرده نیستند)، با اشارات مختصر، اثرِ لبگ مورد بحث قرار می‌گیرد. با توجه به آن که یادداشتِ [Leb 1901] در واقع جزئی از رسالهٔ دکتری لبگ

1. Mesure de Haar. Convolution

است، که یک سال پیش از دفاع ارائه شده است، تحلیلِ بورباکی از رساله، به منزلهٔ بررسیِ [Leb 1901] نیز می‌تواند منظور شود. ما هم این شیوه را تعقیب می‌کنیم.

البته، در دو بخش ۲۳ و ۲۴، اشارهٔ بورباکی ناظر بر آن است که انتگرال لبگ کفایت نمی‌کرد و لذا توسیع‌های دیگر، از جمله، توسیع‌های مجرد (فرشه[۱]، کاراتئودوری[۲]) مطرح شدند.

از دید ما، یادداشت‌های تاریخی بورباکی کلاً، و یادداشت‌هایش در مورد انتگرال خصوصاً، بسیار آموزنده و مورد نیاز استادان و دانشجویان ارشد ریاضی هستند. اما اینجا ناچار به بخش اندکی از آن اکتفا می‌کنیم.

نخستین ملاحظهٔ مهم بورباکی تاریخچهٔ فکر تعمیم انتگرال است که توسط دیریشله[۳] و ریمان در رابطه با سری‌های فوریه[۴] و کاربرد آن‌ها، هم در مسائل علوم طبیعی و هم در نظریهٔ اعداد، رخ داد. ملاحظهٔ دیگر آن که نوشتهٔ ریمان در این زمینه به سال ۱۸۶۷، پس از وفات ریمان، منتشر شد. در این زمان، «*برای این گونه پژوهش‌ها، اوضاع مساعدتر بود، و انتگرال ریمان جایگاه طبیعی خود را یافت، جایگاهی در جریان یک رشتهٔ افکار که منجر به بررسی ژرفای «پیوستار» و توابع متغیر حقیقی گردید*، (به ویژه توسط وایرشتراس[۵]، دوبوا ـ ریمون[۶]، هانکل[۷]، دینی[۸]) *و تا آنجا پیش رفت که با کارهای کانتور*[۹] *به تأسیس نظریهٔ مجموعه‌ها منجر شد*». شرط انتگرال‌پذیری، به گونه‌ای که ریمان مطرح می‌کند، فکر اندازه را پی‌ریزی می‌کند: شرطِ انتگرال‌پذیریِ یک تابع، آن است که «اندازهٔ» مجموعهٔ نقاطِ ناپیوستگیِ تابع، برابر با صفر باشد. اما قریب سی سال گذشت تا این که این فکر به شیوه‌ای مناسب و مفید به شکل یک نظریه ارائه شود.

سپس، بورباکی به کار ریاضی‌دانانی اشاره می‌کند که در تأسیس نظریهٔ اندازه

---

1. Fréchet
2. Carathéodory
3. Dirichlet
4. Fourier
5. Weierstrass
6. Du Bois-Reymond
7. Hankel
8. Dini
9. Cantor

کارهایی انجام دادند: اشتولتس[1] ، هارناک[2]، کانتور، پئانو[3] و ژردان[4]. توضیحاتی هم در تعاریف آن‌ها می‌دهد که ما در اینجا نمی‌آوریم. بالاخره، به کار نهادینهٔ بُرل و لبگ می‌پردازد. توضیحی که دربارهٔ کار لبگ می‌دهد، دقیقاً شرح روش ارائه شده در یادداشتِ [Leb 1901] است، اما اضافه می‌کند که لبگ اندازهٔ خارجی را به تقلید از پئانو و کامی ژردان[5] انجام می‌دهد. همچنین به پژوهش لبگ در جستجوی توابع اولیه بها می‌دهد. سپس به تحسین کار لبگ می‌پردازد: «نتایج لبگ، موجب پیشرفت‌های بیرون از حدّ شُماری، دربارهٔ مسائل کلاسیکِ مطرح در حسابِ بینهایتیک[6] می‌شود، که نمی‌توانیم در اینجا آن‌ها را با شرح جزئیات بیاوریم.»

مجدداً، بررسی فوق در مورد توابع اولیه را بیشتر می‌شکافد. ما از آن می‌گذریم. نهایتاً انتگرال چندگانهٔ لبگ را که در [Leb 1910] و در کتاب‌هایش انشا کرده است، مورد گفتگو قرار می‌دهد.

کتاب کارل بی بویر

کتاب کارل بویر [Boy 1968] از همان آغاز، با عنوانش، « A History of Mathematics» هشدار می‌دهد که در انتخاب مباحث و نحوهٔ نگاه به آن‌ها راه ویژه‌ای پیش می‌گیرد و در عین حال، داعیهٔ فراتر از تواضع ندارد. فصل آخر کتاب (فصل ۲۷)، به «جلوه‌هایی از قرن بیستم» اختصاص یافته است. این فصل با شعاری به نقل قول از سی جی کیزر[7] آغاز می‌شود که می‌گوید: عصرِ طلاییِ ریاضیات، عصرِ اقلیدس نیست، عصر ماست. نه در کتابنامهٔ پایان این فصل و نه در پایان فصل پیش، که بند نخست آن

---

1. Stolz
2. Harnack
3. Peano
4. Jordan
5. C. Jordan

۶. Calcul infinitésimal، اصطلاح **حسابان** نیز اخیراً برای این واژهٔ مرکب به کار می‌رود، که اگر به منظور حساب بی‌نهایت کوچک‌ها و بی‌نهایت بزرگ‌ها باشد، ان تثنیهٔ آن بجاست، اما معنای حساب دیفرانسیل و انتگرال دامنهٔ آن را محدود می‌کند.

7. C. J. Keyser

عنوان عصر طلایی دارد، مرجع نقل قول فوق را نیافتم. این مهم نیست، اما این مهم است که آثار ریاضی در زمان‌های اخیر، رشد و تأثیر جهانی خود را به اثبات رسانیده است: هم قرن نوزده (فصل‌های ۲۳ تا ۲۶ کتاب)، هم نیمهٔ نخست قرن بیستم (فصل آخر این کتاب)، و هم نیمهٔ دوم قرن بیستم (موضوع مقالات و کتاب‌های متعدد، رجوع شود به منابع مندرج در دو کتاب، به کوشش پیه، که در [ش ۱۳۸۱ و ش ۱۳۸۳] معرفی شده‌اند)، نهایتاً در آغاز قرن بیست و یکم (کتاب انفجار ریاضیات [ش ۱۳۸۴]). لذا، توجه به این تاریخ از اهمیت به سزایی برخوردار است.

تحلیل کارِ لبگ، در بند یازده این فصل از کتاب ([Boy 1968]، صص ۶۶۳-۶۶۶) آمده است. بویر در این فصل، پس از آن که در بند ده و بندهای پیش، به اختلاف نظر شهودگرایان مشهور، هرمان وایل و براوِر با صورتگرایان و منطق‌گرایان پرداخت، بند ۱۱ را چنین آغاز می‌کند: همهٔ رهبران ریاضی در آغاز قرن بیستم، در مناقشهٔ صورتگرا ـ شهودگرا درگیر نشدند. از جمله، هانری لبگ، یکی از با اصالت‌ترین و مولّدترین ریاضی‌ورزان، در یکی از جلوه‌های مهم آنالیز، انقلابی پدید آورد بی‌آن که به یکی از آن جبهه‌های عقیدتی، بپیوندد. با مطالعهٔ کتاب بویر، خواننده تا اندازهٔ قابل توجهی با مفاهیم ریاضی مورد بحث آشنا می‌شود. در مورد انتگرال‌های ریمان و لبگ هم این حکم صادق است. البته، در برخی موارد بهتر بود با دقت بیشتر، خطر اشتباه را از خوانندهٔ غیرمتخصص دور کند. مثلاً در نقل قول قضیهٔ معروف هاینه[1] و برل، در ص ۶۶۵ سطر ۵ به جای:

If a closed set of points…

بهتر بود قرار می‌داد:

.If a bounded closed set of points…

به علاوه، او با زیبایی تمام، ارتباط انتگرال با پیشینهٔ آن به ویژه انتگرالِ ریمان را در این فصل و فصل‌های قبل روشن می‌کند و هم چنین با اشاره‌هایی پیامدهای پس از او، از قبیل انتگرالِ دانژوا و انتگرالِ هاآر[2] را نیز نادیده نمی‌گیرد. بویر به درستی می‌گوید که

1. Heine
2. Haar

لُبگ نظریهٔ خود را در کتاب‌هایش تشریح کرده است. توصیه می‌کنم کتاب تاریخ ریاضیات بویر، نه تنها از حیث مراجع مربوط به لبگ، بلکه از نظر نحوهٔ برخورد با تاریخ علم، و به ویژه با تاریخ ریاضیات، و مراجع عمومی تاریخی که در پایان هر فصل و در آخر کتاب آورده است، مورد مراجعهٔ علاقه‌مندان قرار گیرد.

این جملهٔ بویر در مورد لبگ (ص ۶۶۴) بسیار تحسین‌آمیز است:«انتگرال ریمان بر تمام مطالعات راجع به انتگرال غلبه داشت تا آنکه لُبِگ به عنوانِ ارشمیدسِ عصرِ تعمیم درآمد». در واقع، اینجا از سویی اشاره به آن می‌شود که روش‌های انتگرال و حاصل‌جمع‌های ریمان همان حاصل‌جمع‌های یونان باستان هستند که برای محاسبهٔ مساحت‌های اشکال محدود به خم‌های نامستقیم به کار می‌رفتند، و از سوی دیگر نقش برجستهٔ ارشمیدس در علوم یونان باستان، بلکه در همهٔ اعصارِ تاریخ، به لبگ نیز داده شده است.

مقالهٔ ژان پُل پیِه

علاوه بر ویراستاری مجموعهٔ دو کتاب [Pie 1994] و [Pie 2000]، راجع به گسترش ریاضیات در قرن بیستم، ژان پُل پیِه، استاد مرکز دانشگاهی لوگزامبورگ، نویسندهٔ مقالهٔ مبسوطی با عنوان «انتگرال و اندازه از ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰ است ([Pie 1994a]). او مقالات توصیفی جالب دیگری نیز نوشته است که موضوع انتگرال در دل آن‌ها جا دارد. از جمله، مقالهٔ پیه دربارهٔ میانگین‌پذیری را باید نام برد، یعنی دربارهٔ مفهومی که ریشه‌اش طرحِ لبگ در نظریهٔ انتگرال است. برگردانِ فارسی آن مقاله در فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی چاپ شده است. منظور ما اینجا محدود به ([Pie 1994a]) است.

در این مقاله ([Pie 1994a])، تعریف کانتور (۱۸۸۴) از اندازهٔ زیرمجموعه‌های فضای n-بُعدی $\boldsymbol{R}^n$ ، عیب و نقص آن، و تحلیل تسرملو[1] (۱۹۳۲) از کار کانتور بیان می‌شود. سپس، به همین شکل، تعریف پئانو (۱۸۸۳) از اندازه‌پذیریِ بخش‌های خط حقیقی $\boldsymbol{R}$ ، و فضای $\boldsymbol{R}^۲$ و فضای $\boldsymbol{R}^۳$ گفته می‌شود. سرانجام، مفهوم اندازه از دید بُرِل (۱۸۹۸) در

1. Zermelo

مورد مجموعه‌هایی که بعداً مجموعه‌های برلی نامیده می‌شوند، ارائه می‌شود. راجع به پیشرفت‌های مفهوم انتگرال در اواخر قرن ۱۹، و تفوق آن بر نظریهٔ کوشی، اشارات مختصری به کار پیشگامان این وادی، ریمان، داربو و اشتیلتیس می‌شود. پس از اشاره به یکی از مسائل هیلبرت (۱۹۰۰)، که هر چند دربارهٔ انتگرال است، و از نظر زمان هم آشکارا با شروع قرن قرین است، اما ارتباط آن با سیر فکری قبل، یعنی تکوین مفاهیم اندازه و تعمیم انتگرال، دیده نمی‌شود. سپس با تفصیل تمام، مطالب مقالهٔ تاریخی لبگ را عملاً کلمه به کلمه نقل و تفسیر می‌کند. از آنجا که ما برگردان فارسی اصل مقاله را در بخش پیش آوردیم، از تکرار مطالب پیه خودداری می‌کنیم. در بقیهٔ مقالهٔ پیه، هم کارها لبگ و برل، و هم طبعاً کارهای عمدهٔ دیگران و تفسیرهای جالب متعدد از این کارها و از جمله از کار لبگ ارائه می‌شود. این مقاله با توصیه‌هایی که شده و ظاهراً مورد پذیرش تحریریهٔ فرهنگ و اندیشه ریاضی قرار گرفته است، به زودی ترجمه (و شاید تلخیص) و در فرهنگ و اندیشه ریاضی منتشر خواهد شد. از این رو و هم از آن جهت که متن حاضر به درازا کشید، از ادامهٔ بحث آن صرف‌نظر می‌کنیم.

جمع‌بندی

مقالهٔ تاریخی لبگ، برگ زرینی که در آغاز مقدمه نام بردیم، ارزش والایی از نظر تاریخ‌نگاران علم دارد. اجازه می‌خواهم دو سه نکته از برداشت‌های خود را به این مناسبت، با خوانندگان جوان مجله در میان بگذارم: این برگ نمی‌توانست به تنهایی توجه خواننده و حتی نویسندهٔ آن را جلب کند. فکرهای اصلی و اصیل این اثر، در قالب زمان و مکان و شرایط خاصی که زاییدهٔ کار پیشینیان و مقدمهٔ کار آیندگان بوده است پدید آمده و معنی یافته است. این کار، محصول کار پی‌گیری جوانی با پشتکار و با استعداد بوده که، در محیطی مناسب برای رشد ارزش‌های علمی، دنبال افکار دور و دراز خود را گرفته و به مسائل پیش پا افتادهٔ کم مایه رضایت نمی‌داده است. این برگ در نوشته‌های مبسوط جهت‌دار، با شروع از رسالهٔ دکتری نویسندهٔ آن، و به طور مفصل‌تر در کتاب‌های نویسنده و مقالات طولانیش باز شده و به رشد خود ادامه داده است.

انگیزهٔ آموزشی نویسنده، دست‌کم برابر با انگیزه‌های دیگرش بوده است. موفقیت تاریخی این اثر فقط مدیون کار تبلیغاتی شخص نویسنده نیست. خودِ کار، هنرمندانه ارائه شده و ادامه یافته است. اما به هر حال، این اثر مسائلی را می‌گشاید و در مسائلی می‌ماند، تا آن که انتظارِ کاری بدیع و مثمرِ ثمر در حل مسألهٔ جدید، به سر رسد و داستان، در مرحله‌ای والاتر، ادامه یابد. چه درسی از این تاریخ باید یا نباید گرفت؟

در یک سخن کوتاه، دریغ است که چنین آثار، عالِمانه و بی‌ریا، سرمشق قرار نگیرند، و به جای آن، تعداد مقالاتِ کم‌مایه یا بیمایه، ملاکِ ارزشیابی در دستگاه‌های ذیربط قرار گیرند. اگر نفس تاریخ علم، و به ویژه تاریخ ریاضیات معاصر، مهم و با ارزش است، بر پژوهشگران و دستگاه‌های مدیریت پژوهشی ایران و جهان، واجب است توجه فرمایند که شاید آنچه در نظام ارزشیِ جاری رایج است، با آثارِ ماندگار در تاریخِ علم، زمین تا آسمان فاصله داشته باشد.

منابع

[بور ۱۳۷۹]، بورباکی، ن.، *نظریهٔ مجموعه‌ها*، *کتابچهٔ خلاصه*، انتشارات دانشگاه تهران ۲۴۸۵، تهران، ایران، ۱۳۷۹ (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

[بور ۱۳۸۰ آ]، بورباکی، ن.، *توپولوژی عمومی*، *کتابچهٔ خلاصه با یادداشت‌های تاریخی*، انتشارات دانشگاه تهران ۲۴۹۱، تهران، ایران، ۱۳۸۰ (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

[بور ۱۳۸۰ ب]، بورباکی، ن.، *فضاهای برداری توپولوژیک*، *کتابچهٔ خلاصه با یادداشت‌های تاریخی*، انتشارات دانشگاه تهران ۲۵۱۱، تهران، ایران، ۱۳۸۰ (ترجمه ارسلان شادمان).

[بور ۱۳۸۱]، بورباکی، ن.، *خمینه‌های دیفرانسیل و تحلیلی*، *کتابچهٔ خلاصه*، *جلد اول بندهای ۱ تا ۷*، انتشارات دانشگاه تهران ۲۵۸۲، تهران، ایران، (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

[بور ۱۳۸۵؟]، بورباکی، ن.، *خمینه‌های دیفرانسیل و تحلیلی*، *کتابچهٔ خلاصه*، *جلد دوم بندهای ۸ تا ۱۵*، انتشارات دانشگاه تهران (در دست چاپ)، تهران، ایران، ۱۳۸۵؟، (ترجمهٔ ارسلان شادمان).

[ش ۱۳۸۰ آ] شادمان ا.، *نقد کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰*، قسمت اول، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، ج. ۲۲، ش. پیاپی ۲۶، بهار ۱۳۸۰، صص ۵۳ تا ۶۶.

[ش ۱۳۸۰ ب] شادمان ا.، *نقد کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۰۰ تا ۱۹۵۰*، قسمت دوم، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، ج. ۲۲، ش. پیاپی ۲۷، پاییز ۱۳۸۰، صص ۷۱ تا ۸۳.

[ش ۱۳۸۲] شادمان ا.، *نقد کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰*، قسمت اول، فرهنگ و اندیشهٔ

ریاضی، ج. ۲۴، ش. پیاپی ۳۱، پاییز ۱۳۸۲، صص ۴۱ تا ۷۵.

[ش ۱۳۸۳] شادمان ا.، *نقد کتاب گسترش ریاضیات ۱۹۵۰ تا ۲۰۰۰*، قسمت دوم، فرهنگ و اندیشهٔ ریاضی، ج. ۲۵، ش. پیاپی ۳۲، بهار ۱۳۸۳، صص ۴۵ تا ۷۸.

[ش ۱۳۸۴] شادمان، ا. (به کوشش)، *انفجار ریاضیات*، انجمن ریاضی ایران، تهران، ایران، (کتاب در انتظار چاپ ۱۳۸۴؟ یا ۱۳۸۵؟).

(با همکاری انجمن ریاضی ایران و انجمن‌های ریاضی فرانسه (SMF) و انجمن ریاضی صنعتی و کاربردی (AMAI)، ترجمه از فرانسه، تهیه و انتشار به صورت لوح فشرده (CD)، ۱۳۸۴، دسترسی در شبکه اینترنت (از ۱۳۸۴): http://www.ims.ir/publications/em

[BCL 2001] Bony, J.M., Choquet, G. et G. Lebeau, Le centenaire de l'intégrale de Lebesgue, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Série I, t. **332** (2001), pp. 85-90.

[Bor 1898] Borel, E., *Leçons sur la théorie des fonctions*, Gauthier-Villars, Paris, 1898.

[Bou 1960] Bourbaki, N., *Eléments d' histoire des Mathématiques*, Histoires de la pensée IV, Hermann, Paris, 1960.

[Bou 1984] Bourbaki, N., *Eléments d' histoire des Mathématiques*, Masson Editeur, Paris, 1984.

[Bou 1994] Bourbaki, N., *Elements of the History of Mathematics*, (translated by Jhon Meldrum), Springer-verlag, Berlin-Heidelberg, 1994.

[Boy 1968] Boyer, C.B., *A History of Mathematics*, Wiley International Edition, John Wiley & Sons, New York, 1968.

[Bre 1972] Brelot, M., Les étapes et les aspects multiples de la théorie du potentiel, *Enseignements Math. (2)*, **18**(1972), pp. 1-36.

[Car 1998] Cartier, P., The Continuing Silence of Bourbaki, *The Mathematical Intelligencer*, vol. **20** (Jan. 1998), PP. 22-28.

[Gor 1994] Gordon, R.A., The Integrals of Lebesgue, Denjoy, Perron and Henstock, volume 4 of Graduate Studies in Mathematics, AMS, Providence, Rhode Island, 1994.

[Hen 1988] Henstock, R., A short history of integration theory, *Southeast Asian Bull. Math.*, **12** (1988), pp. 75-95.

[Leb 1901] Lebesgue, H., Sur une généralisation de l'intégrale définide, *C. R. Séances Acad. Sci.*, t. **132** (janvier-juin 1901), pp. 1025-1027.

[Leb 1910] Lebesgue, H., Sur l'intégration des fonctions discontinues, *Ann. Scientifiques de l École Norm. Sup. 3-ième série*, t. **27** (1910), pp. 361-450.

[Pie 1994 a] Pier, J.-P. Intégration et mesure 1900-1950, pp. 517-564, in: *Development of Mathematics 1900-1950*, Brikhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1994.

[Pie 1994 b] Pier, J.-P. (ed. by), *Development of Mathematics 1900-1950*, Brikhäuser, Basel-Boston-Berlin, 1994.

[Pie 2000] Pier, J.-P. (ed. by), *Development of Mathematics 1950-2000*, Brikhäuser, Basel-Boston-Berlin, 2000.

پژوهشگاه علوم انسانی و مطالعات فرهنگی
پرتال جامع علوم انسانی