مجله علوم اجتماعی و انسانی دانشگاه شیراز
دوره نهم، شماره اول، پائیز ۱۳۷۲

روش عمومی برای تعیین زمان تکمیل پروژه در شبکه های پرت (PERT)

دکتر محمد علی سوخکیان
دانشگاه شیراز

خلاصه

برای شبکه های Stochastic PERT مشکل اصلی در تعیین تابع توزیع احتمال زمان تکمیل پروژه وجود بستگیهای ساختمانی و آماری بین فعالیتها می باشد. این بستگیها نحوه مشخص نمودن فعالیتها و مسیرهائی، که از همه بحرانی تر می باشند را نیز مشکل می سازند.

مقاله حاضر، با درنظرگرفتن بستگیهای موجودبین فعالیتها، روشی عمومی جهت ارزیابی زمان تکمیل پروژه با استفاده از روش CIM (۱) ارائه خواهد نمود.

در روش پیشنهادی زمان انجام فعالیتها می تواند دارای تابع توزیع پیوسته یا گسسته در یک مجموعه زوج مرتب محدود باشد. موضوع مورد بحث این مقاله ارائه روش پیشنهادی در شبکه هائی است که زمان انجام فعالیتها توزیع گسسته داشته باشند. این روش تابع توزیع احتمال دقیق از زمان تکمیل پروژه را ارائه می نماید.

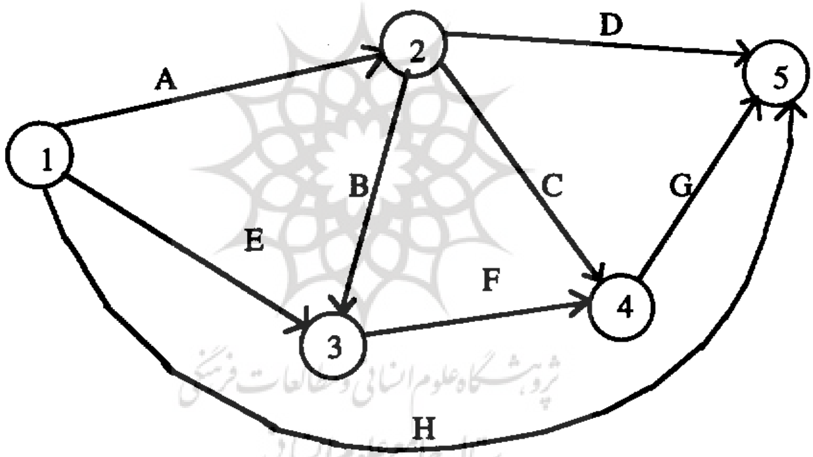
این مقاله بخشی از رساله دکتری مؤلف است و در کنگره ملی مهندسی صنایع و بهره وری که در خرداد ماه ۱۳۷۱ در دانشگاه صنعتی امیرکبیر برگزار شد، نیز ارائه شده است.

در مقایسه با روش شبیه سازی مونت کارلو، روش پیشنهادی قابل فهمتر و استفاده از آن در شبکه های ساده آسانتر است. به علاوه با دقت یکسان روش شبیه سازی مونت کارلو احتیاج به محاسبات خیلی زیادتر از روش پیشنهادی دارد اما بایستی اذعان داشت که برای شبکه های پیچیده روش شبیه سازی مونت کارلو مناسبتر است و بطور کلی روش مطلوب برای شبکه ها می تواند تلفیقی از روش پیشنهادی و روش شبیه سازی مونت کارلو باشد.

مقدمه

شبکه های PERT شبکه های غیر سیکلی اند که از چندین فعالیت و گره مانند شکل شماره ۱ تشکیل شده اند.

شکل ۱



در این شبکه ها میانگین زمان تکمیل پروژه از جمع زدن میانگین زمان انجام هر فعالیت بر روی مسیر بحرانی (طولانی ترین مسیر) بدست می آید. در ضمن واریانس زمان تکمیل پروژه نیز از جمع واریانس فعالیتهای بحرانی حاصل می گردد. در انجام این محاسبات فرضهای زیر که به دو گروه تقسیم می شوند در نظر گرفته شده اند:

۱- فرضهائی که در ارتباط با هر فعالیت می باشند:

الف ـ فرض اینکه هر فعالیت تابع توزیع بتا (') دارد با سه زمان (خوش بینانه a، با بیشترین احتمال وقوع m، و بدبینانه b)

ب ـ فرض اینکه میانگین و واریانس هریک از فعالیتها برابر است با

$$\mu = \frac{a+4m+b}{6} \quad (۱) \qquad , \qquad \sigma^2 = [\frac{b-a}{6}]^2 \quad (۲)$$

۲- فرضهائی که در ارتباط با کل پروژه می باشند :

الف - فرض استقلال زمان انجام فعالیتها از یکدیگر

ب - فرض اینکه مسیر بحرانی به اندازه کافی از سایر مسیرها بزرگتر است تا بتوان فرض کرد امکان اینکه مسیر دیگری بحرانی باشد وجود ندارد.

فرضهای ۱و۲ ما را به این نتیجه می رسانند که زمان انجام پروژه (T_N) دارای تابع توزیع نرمال است با میانگینی برابر با جمع میانگین زمان انجام فعالیتها واقع بر روی مسیر بحرانی (g_N) و واریانسی برابر با جمع واریانس فعالیتها واقع بر روی مسیر بحرانی σ^2_N ،لذا احتمال آنکه زمان انجام پروژه فرضاً کوچکتر یا مساوی t باشد بصورت زیر محاسبه می گردد.

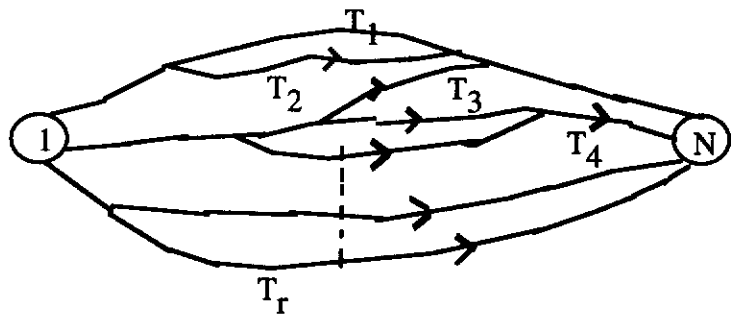
$$P_r [T_N \leq t] \Phi \left(\frac{t-g_N}{\sigma_N}\right) \quad (۳)$$

از آنجا که تنها میانگین و واریانس زمان انجام فعالیتها در نظر گرفته می شود تابع توزیع «بتا» با سه زمان خوش بینانه، با بیشترین احتمال وقوع و بدبینانه ممکن است در برخی موارد قابل کاربرد نباشد. به هر حال خطاهای مربوط به فرضیات درباره هر کدام از فعالیتها به تنهائی ممکن است باعث ایجاد خطا در محاسبه میانگین و زمان تکمیل پروژه بشوند. به هر جهت حتی اگر اعداد بدست آمده، یعنی میانگین و واریانس زمان انجام هر فعالیت، صحیح باشد خطاهای مشخصی ممکن است در تعیین میانگین و واریانس زمان تکمیل پروژه حاصل گردد.

اگر فرض کنیم Z(Te) نشان دهنده طول مسیر Te باشد، زودترین زمان رسیدن به گره N در شکل (۲) از رابطه (۴) حاصل می گردد.

بطوریکه r تعداد مسیرها از گره ۱ تا گره N می باشد و مسیرهای $T_k (k=1, \ldots, r)$ مستقل نیستند زیرا معمولاً فعالیتهائی را بطور مشترک دارا می باشند.

شکل ۲



$$T_N = \underset{T_e \in P}{\mathrm{Max}} \{ Z(T_e) \} \qquad (۴)$$

$$T_N = \mathrm{Max} \, [Z(T_1), Z(T_2), \ldots, Z(T_r)]$$

اگر فرض کنیم زمان انجام هر فعالیت نرمال است، T_N که ماکزیموم تعداد محدودی ازمجموعه متغییرهای تصادفی است بصورت نرمال توزیع نشده است. در حقیقت با فرض استقلال، تابع توزیع احتمال (pdf) مربوط به T_N، حاصلضرب یکمده pdf است با فرمول زیر:

$$\begin{aligned} P_r [T_N \le t] &= P_r [\mathrm{Max} \{Z(T_1), Z(T_2), \ldots, Z(t_r)\} \le t]) \\ &= P_r [Z(t_1) \le t, Z(t_2) \le t, \ldots, Z(t_r) \le t] \\ &= \prod_{k=1}^{r} P_r[Z(t_k) \le t] \end{aligned} \qquad (۵)$$

در صورت استقلال

بالاخره اگر تابع توزیع احتمال T_N با تابع نرمال تقریب زده شود باید توزیع نرمالی باشد با میانگین و واریانسی بجز آنچه که توسط PERT بدست می آید. بنابراین زمان حاصل با اینگونه فرضها در شبکه های PERT دارای کمبودهائی است که بیشتر مطالعات در زمینه رفع این کمبودها به سه دسته زیر تقسیم می گردند:

۱- روشهای تحلیلی

۲- روشهای تقریبی

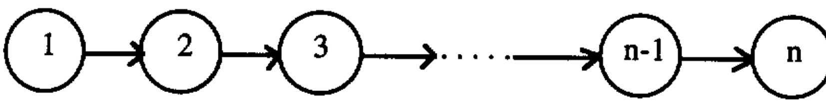
۳- روشهای شبیه سازی

روش پیشنهادی

با ملاحظه شبکه های ساده زیر روش پیشنهادی ارائه می گردد .

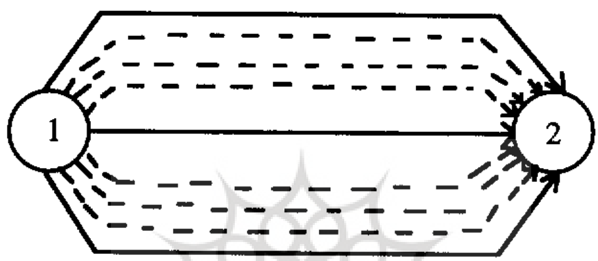
۱- شبکه ای که از فعالیتهای سری تشکیل شده باشد .

شکل ۳



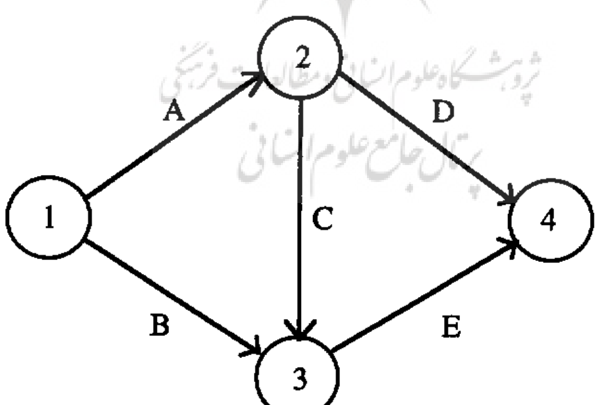
۲- شبکه ای که از فعالیتهای موازی تشکیل شده باشد .

شکل ۴



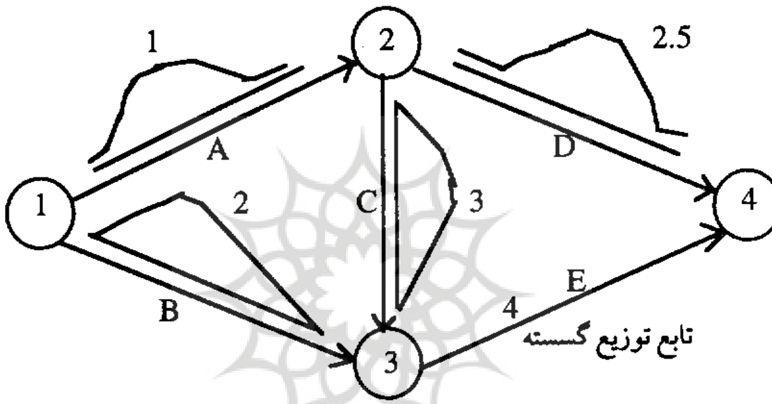
۳- شبکه ای که دارای فعالیت مشترك بین چند مسیر باشد که ساده ترین آنها پل و تستون می باشد .

شکل ۵



البته شبکه هائی که تنها از فعالیتهای سری و یا فعالیتهای موازی تشکیل شده باشند به روشهای تحلیلی یا تقریبی قابل حل نمی باشند. لذا تنها راه حل آنها استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو می باشد. در روش شبیه سازی مونت کارلو بطور تصادفی از تابع توزیع هر فعالیت زمان وقوع استخراج می گردد و با استفاده از ۵ تا ۱۰ هزار مرتبه نمونه گیری میانگین زمان تکمیل پروژه محاسبه می شود. به عنوان مثال در پل وتستون شکل ۶ با در نظر گرفتن تابع توزیع فعالیتهاکه بر روی‌شبکه نشان داده شده بطور تصادفی از تابع توزیع هر فعالیت زمان وقوع استخراج شده و بر روی شبکه نشان داده شده است.

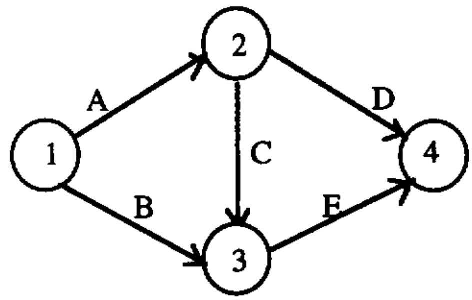
شکل ۶



همانطور که ملاحظه می شود از سه مسیر (4-2-1) و (4-3-2-1) و (4-3-1) طولانی ترین مسیر، مسیر (4-3-2-1) می باشد با مجموع زمان (8 = 4+3+1). این عمل بایستی به تعداد دفعات خیلی زیاد تکرار شود و از زمانهای بدست آمده میانگین گرفته شود.

اما در روش پیشنهادی جهت حل مشکل فعالیتهای مشترك، آنها را بر روی زمانهای وقوع مختلف شرطی می کنیم. برای مثال اگر شبکه شکل ۵ را که مجدداً در زیر آورده شده با توابع توزیع داده شده در جداول یک تا پنج در نظر بگیریم .

شکل ۵



جدول ۱

فعالیت A :	8	3	$=X_A=$ زمان انجام فعالیت
	0.2	0.8	احتمال $= P =$

$\sigma^2=4$ (واریانس) و $E=4$ (میانگین)

بطوریکه E و σ^2 بصورت زیر محاسبه شده اند:

$$E=\sum X_A P(X_A) \quad (۶)$$

$$E= 3(0.8)+8(0.2)= 4$$

$$\sigma^2=\sum X_A^2 P(X_A) - (E)^2 \quad (۷)$$

$$\sigma^2= 9(.8)+64(.2)-16= 4$$

جدول ۲

فعالیت B :

$X_B = 6$	9
$P = 0.6$	0.4
$E= 7.2$	$\sigma^2=2.16$

جدول ۳

فعالیت C:

$X_C = 4$	6
$P = 0.3$	0.7
$E = 5.4$	$\sigma^2 = 0.84$

فعالیت D:

جدول ۴

$X_D = 4$	5
$P = 0.9$	0.1
$E = 4.1$	$\sigma^2 = 0.09$

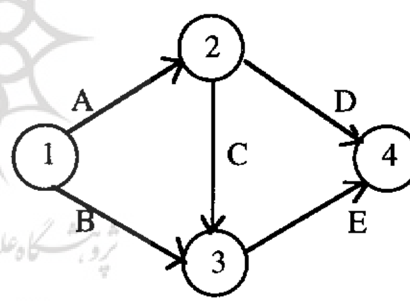
فعالیت E :

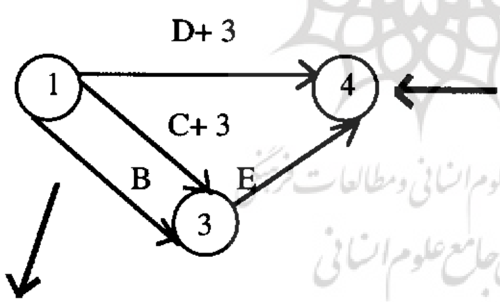
جدول ۵

$X_E = 1$	2
$P = 0.5$	0.5
$E = 1.5$	$\sigma^2 = 0.25$

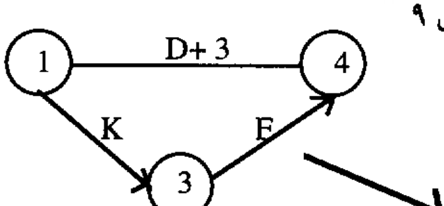
فعالیتهای A و E هر کدام فعالیتهای مشترك بین دو مسیر می باشند که با شرطی کردن فعالیت A بر روی اولین مقدار آن یعنی 3 شبکه به صورت زیر در می آید.

شکل ۸ شکل ۷



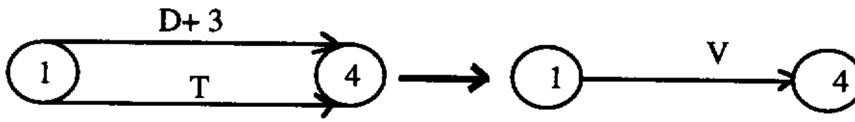


شکل ۹



به صفحه بعد مراجعه فرمائید

شکل ۱۰ شکل ۱۱



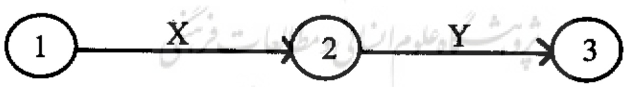
به طوری که K نتیجه دو فعالیت موازی (D+ 3) و B است و T نتیجه دو فعالیت سری K و E است و بالاخره V نتیجه دو فعالیت موازی (D+ 3) و T می باشد. V تابع توزیع زمان تکمیل پروژه را برای اولین مقدار A می دهد که از آن میانگین و واریانس زمان تکمیل پروژه برای اولین مقدار A محاسبه می گردد و مجدداً برای دومین مقدار A این عمل انجام می شود و با برداشت شرط ، به عبارتی Unconditional کردن تابع توزیع نهائی، تابع توزیع زمان تکمیل پروژه حاصل می شود که از آن میانگین و زمان تکمیل پروژه محاسبه می گردد.

در زیر عمل جمع (Convolution Operation) و عمل انتخاب بزرگترین عدد (Greatest Operation) را برای توابع توزیع نشان می دهیم.

عمل جمع زدن توابع توزیع

به عنوان مثال شبکه ساده با دو فعالیت به صورت سری با توابع توزیع گسسته شکل (۱۲) را در نظر می گیریم: جداول ۶ و ۷ بترتیب تابع توزیع احتمال فعالیتهای X و Y را نشان می دهند.

شکل ۱۲



جدول ۶

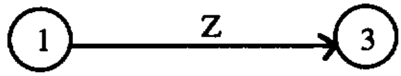
X	$P_X(x)$
2	0.2
3	0.4
4	0.4

جدول ۷

Y	$P_Y(y)$
3	0.3
4	0.5
5	0.2

جمع دو فعالیت X و Y برابر Z می باشد که در شکل ۱۳ نشان داده شده و تابع توزیع آن با انجام عمل (Convolution) محاسبه گردیده و در جدول ۸ نشان داده شده است .

شکل ۱۳



جدول ۸

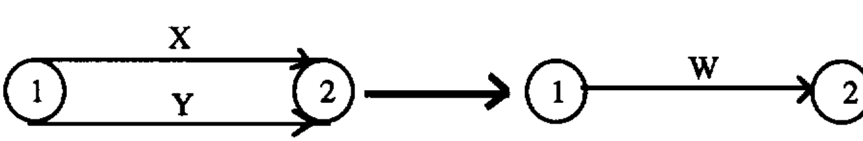
Z	$P_Z(z)$	
5	(0.2)(0.3)	= 0.06
6	(0.2)(0.5)+(0.4)(0.3)	= 0.22
7	(0.2)(0.2)+(0.4)(0.5)+(0.4)(0.3)	= 0.36
8	(0.4)(0.2)+(0.4)(0.5)	= 0.28
9	(0.4)(0.2)	= 0.08

به عنوان مثال، زمانی که X برابر 2 و Y برابر 3 باشد جمع این دو برابر 5 می شودو احتمال اینچنین وضعیتی برابر است با (0.3) (0.2) و یا زمانی که X برابر 2 و Y برابر 4 باشد و یا X برابر 3 و Y برابر 3 باشد جمع این دو برابر 6 می شود با احتمالی برابر با (0.2)(0.5) + (0.4)(0.3) و همینطور الی آخر .

عمل انتخاب بزرگترین عدد

به عنوان مثال شبکه ساده با دو فعالیت به صورت موازی با توابع توزیع گسسته شکل ۱۴ را در نظر می گیریم :

شکل ۱۵ شکل ۱۴



جدول ۹

X	$P_X(x)$	$F_X(x) = CP(x)$
2	0.2	0.2
3	0.4	0.6
4	0.4	1.0

جدول ۱۰

Y	$P_Y(y)$	$F_Y(y) = CP(y)$
3	0.3	0.3
4	0.5	0.8
5	0.2	1.0

به طوری که جداول ۹ و ۱۰ بترتیب جداول ۶و۷ می باشند که در آنهاCP نشان دهنده تابع توزیع تجمعی است.

با استفاده از روابط فوق، تابع توزیع مربوط به $W = Max \{ X,Y \}$ به صورت جدول ۱۱ محاسبه می شود.

جدول ۱۱

W	$P_W(w)$	$F_W(w)$
2	0.0 - 0.0 = 0.0	(0.2)(0.0) = 0.0
3	0.18 - 0.0 = 0.18	(0.6)(0.3) = 0.18
4	0.80 - 0.18 = 0.62	(0.8)(1) = 0.80
5	1 - 0.80 = 0.20	(1)(1) = 1

بطوریکه:

$$F_W(w) = F_X(w) . F_Y(w) \quad (۸)$$

$$P_W(w) = G_W(w) - F_W(\overline{w}) \quad (۹)$$

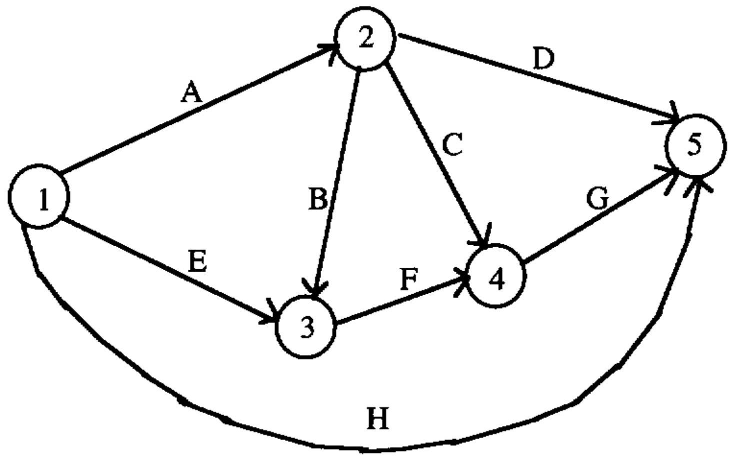
برای $\overline{w}$ به مقدار خیلی کم کوچکتر از w.

مثال تجربی

شبکه PERT شکل (۱) که مجدداً در زیر رسم شده است با زمانهای داده شده در جدول ۱۲ اولین مرتبه در مقاله ای توسط مک کریمون و ریاوك[۲] ارائه شده و سپس توسط مریر و دیگران[۳] با استفاده از روش شبیه سازی مونت کارلو حل شد. در ضمن همین شبکه با استفاده از روش

پیشنهادی حل شده و نتایج در محاسبات جدول ۱۳ مقایسه گردیده اند.

شکل ۱



جدول ۱۲

فعالیت H

X	P
3	0.2
7	0.6
11	0.2

فعالیت D

X	P
2	0.2
5	0.6
8	0.2

فعالیت های C و E

X	P
1	0.2
3	0.6
5	0.2

فعالیت های A و B و F و G

X	P
1	0.2
2	0.6
3	0.2

جدول ۱۳

مقایسه روشهای قراردادی PERT، تحلیلی و شبیه سازی مونت کارلو

زمان تکمیل پروژه

	μ	σ
روش PERT	8.00	1.26
روش تحلیلی	9.23	1.39

روش شبیه سازی مونت کارلو	μ	σ
40 نمونه	9.67	1.27
50 نمونه	9.12	1.55
90 نمونه	9.36	1.41

در جدول ۱۴ درصد خطا مربوط به روش شبیه سازی مونت کارلو در قیاس با مقدار واقعی داده شده است :

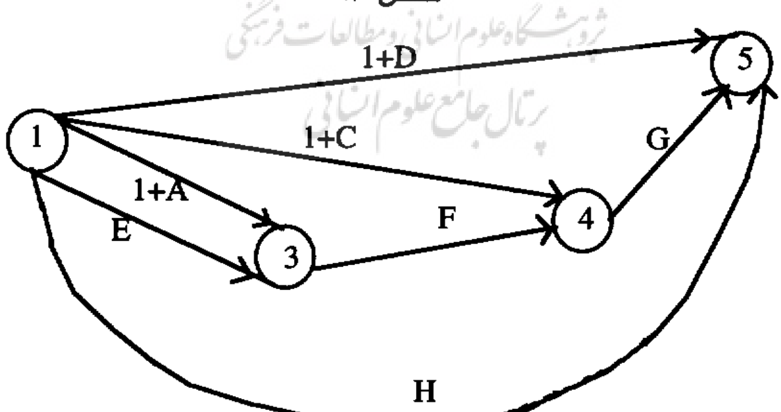
جدول ۱۴

	درصد خطا	
اندازه نمونه	میانگین (مونت کارلوو واقعی)	انحراف معیار (مونت کارلوو واقعی)
40	+ 4.77	- 8.63
50	- 1.19	+ 11.51
90	+ 1.41	+ 1.44

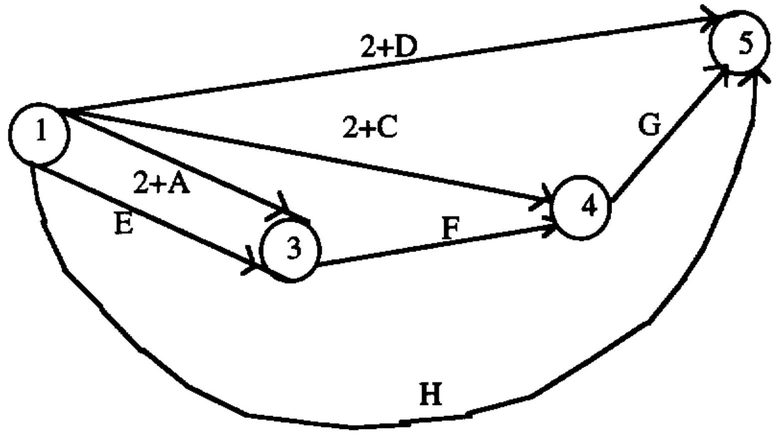
روش پیشنهادی برای حل شبکه شکل (۱)

با شرطی کردن فعالیت A برای سه زمان آن به صورت شبکه شکل های ۱۶ تا ۱۸ تابع توزیع زمان تکمیل پروژه به صورت جدول ۱۵ محاسبه می شود:

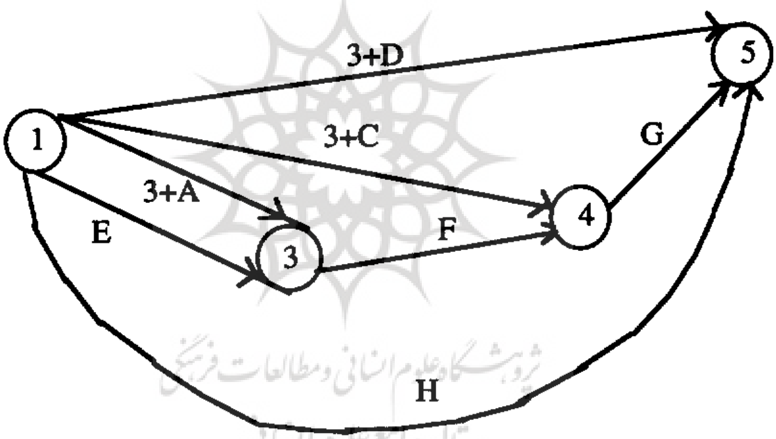
شکل ۱۶



شکل ۱۷



شکل ۱۸



میانگین و انحراف معیار زمان تکمیل پروژه دقیقاً برابر میانگین و انحراف معیار زمان تکمیل پروژه است که به روش تحلیلی بدست آمده و در جدول ۱۳ نشان داده شده است.

جدول ۱۵

X	P(X)
4	0.0000025
5	0.0002303
6	0.0056007
7	0.1326389
8	0.1882111
9	0.2250546
10	0.1936793
11	0.2526822
12	0.0016000

$E = 9.2317133$ $\quad \sigma = 1.3931231$

نتیجه‌گیری

در این مقاله با در نظر گرفتن بستگیهای ساختمانی موجود بین فعالیتها، روشی عمومی جهت ارزیابی زمان تکمیل شبکه های PERT ارائه شده است. در روش پیشنهادی با شرطی کردن زمان فعالیتهای مشترك در چند مسیر این گونه شبکه ها تبدیل به شبکه هائی می شوند که تنها از فعالیتهای سری و موازی تشکیل شده اند و سپس با انجام عملیات جمع و انتخاب بزرگترین عدد، تابع توزیع زمان تکمیل پروژه بدست می آید.

در روش پیشنهادی اگر تابع توزیع فعالیتها گسسته باشد با صرف وقت کمتر و حصول نتیجه دقیقتر از روش شبیه سازی مونت کارلو می توان میانگین و واریانس زمان تکمیل پروژه را بدست آورد. به علاوه در روش پیشنهادی زمان انجام فعالیتها می تواند تابع توزیع پیوسته یا گسسته داشته باشد. با استفاده از این روش می توان زمان تکمیل پروژه هائی که بستگی آماری بین فعالیتهای آن وجود دارد نیز بدست آورد. این موارد و نحوه گسسته کردن توابع توزیع فعالیتهای مشترك مباحثی تکمیلی اند که در آینده به عرضه آنها برای چاپ مبادرت خواهد شد.

منابع و یادداشت ها

1. Chapman, C.B. and D.F. Cooper. "Risk Engineering Basic Controlled Interval and Memory Models," ***Journal of The Operational Research Society***. 34(1), 1983, 51-60.
2. MacCrimmon, K.R. and C.A. Ryavec. An Analytical Study of The PERT Assumption. ***Operations Research***. 12, 1964, 16-37.
3. Merier, R.C. W.T. Newell and H.L.Pazer. ***Simulation in Business & Economics***. Prentice Hall, Inc. 1969.