# کاربرد مدل سازی ریاضی چگونه در باران خیس می شوید؟

اردوان میرزایی
دانشگاه پیام نور

**چکیده**

در این مقاله به کمک روشها و فنون ریاضی به طراحی و آزمایش مدلی برای چگونگی خیس شدن در یک روز بارانی برای طی مسافتی به اندازه ۱۰۰۰ متر می پردازیم. فرمولهای بدست آمده را برای حالتهای مختلف آزمایش می کنیم و سپس به بهبود مدل می پردازیم. در حالتی که سرعت حرکت شما ۶ متر بر ثانیه و باران بطور عمودی ببارد تقریباً به مقدار ۱/۱۳ لیتر خیس خواهید شد. در حالتی که زاویه بارش $30^\circ$ و از روبرو باشد و سرعت حرکت ۶ متر بر ثانیه، تقریباً به مقدار ۱/۴۷ لیتر خیس خواهید شد. اگر باران با زاویه $30^\circ$ و از پشت ببارد باید با سرعت ۲ متر بر ثانیه حرکت کنید تا به مقدار ۰/۲۴ لیتر که حداقل ممکن است خیس شوید، اگر در این حالت سرعت شما ۶ متر بر ثانیه باشد به مقدار ۰/۷۷ لیتر خیس خواهید شد.

**مقدمه**

مدل سازی ریاضی یکی از شاخه های مهّم ریاضی است که کاربرد فراوانی در علوم مختلف دارد. در این مقاله کاربرد مدل سازی ریاضی را در مسئله ای بکار می بریم که همه با آن آشنا هستیم. شاید این فکر از ذهن شما خطور کرده باشد که چگونه در باران راه رویم تا کمتر خیس شویم؟ و ممکن است جوابهایی نیز برای آن یافته باشید.

فرض کنید فاصله بین منزل شما تا دانشگاه یک کیلومتر است. در یک روز بارانی از منزل خارج شده اید، چتر یا بارانی هم برنداشته اید و می خواهید «شانس» خود را امتحان کنید. بنابراین تصمیم به بازگشت به خانه را ندارید و پیاده حرکت خواهید کرد. شما چقدر خیس می شوید؟ این مطلب ساده به نظر می رسد، اما اگر نرخ ریزش باران اندازه گرفته نشده باشد، ممکن است نتوانید بهترین استراتژی را انتخاب کنید.

**شرح واقعی مسئله**

با داشتن شرایط ویژه باران، آیا می توان روشی را انتخاب کرد که خیس شدن شما به حداقل برسد؟ این مدل به طور کامل وابسته به عامل های ورودی زیر است:

الف ـ سرعت باران چقدر است؟

ب ـ مسیر باران چیست؟

پ ـ طول مسیر و سرعت شما چقدر است؟

اکنون ما نیاز به فرمولی داریم که مقدار باران را به عواملی مربوط کند. فرض کنید اطلاعات زیر موجودند:

سرعت راه رفتن $= 2\frac{m}{s}$ [۱]

و

سرعت دویدن = $۶\frac{m}{s}$ [۲]

طول مسیر = $۱۰۰۰ m = ۱ km$ [۳]

سرعت ریزش باران = $۲\frac{m}{s}$ [۲]

شدت باران = $۲ cm/h$

اطلاعات فوق، متوسط مقادیر در نظر گرفته شده‌اند.

## فرمول بندی مدل ریاضی

ابتدا با یک مدل ساده شروع می کنیم. فرض کنید شما با سرعت ۶ متر بر ثانیه می دوید. بنابراین

زمان طی شده در باران = $\frac{۱۰۰۰}{۶} s \simeq ۱۶۷ s$

اکنون تصور کنید شدّت باران ۲ سانتی متر بر ساعت باشد، یعنی $\frac{۲}{۳۶۰۰}$ سانتی متر بر ثانیه می باشد. چون کل مسیر در ۱۶۷ ثانیه طی می شود. پس:

مقدار باران جمع شده در این زمان $= \frac{۲\times۱۶۷}{۳۶۰۰} cm$

$= \frac{۲\times۱۶۷\times۰/۰۱}{۳۶۰۰} m$

اکنون ما به اطلاعاتی در مورد سطح قسمتی از بدن که در معرض باران قرار دارد نیاز داریم. برای فهم بیشتر، شخص را به صورت یک مکعب مستطیل به ابعاد ۱/۵ متر طول، ۰/۵ متر عرض و ۰/۲ متر قطر، در نظر گرفته ایم. پس:

سطح جلو و عقب $= ۱/۵ \times ۰/۵ \times ۲ = ۱/۵ m^۲$

سطح اطراف $= ۱/۵ \times ۰/۲ \times ۲ = ۰/۶ m^۲$

سطح بالا $= ۰/۵ \times ۰/۲ = ۰/۱ m^۲$

سطح کل شخص $= ۲/۲ m^۲$

فرض کنید تمام این سطح باران می خورد، پس:

مقدار باراتی که به شخص در این مدت می خورد $= \frac{۲\times۱۶۷\times۰/۰۱\times۲/۲}{۳۶۰۰} m^۳$

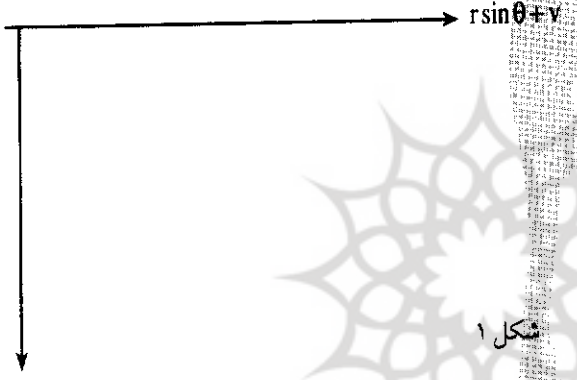
لیتر $۲/۰۴۱ \simeq ۲/۰۴۱ \times ۱۰^۳ cm^۳ \simeq$

مثل این است که ۲ بطری آب یک لیتری را روی شما خالی کنند!

می بینیم که تا اندازه‌ای به یک نتیجه عقلانی رسیده ایم. اکنون دوباره مدل پیچیده تری می سازیم که برای هر زمانی در این مسیر صادق است.

## مفروضات

قالب نسان را با یک مکعب مستطیل نشان می دهیم. شکل (۱) ما را در تفهیم مسئله و بدست آوردن فرمول یاری می دهد. همچنین فرض می کنیم که سرعت شما و سرعت باران ثابت باشد.




شکل ۱

بعضی از کمیتها متغیر نیستند ولی یک مقدار عددی دارند. با این وجود بهتر است که برای آنها به جای عدد از نماد استفاده کنیم. در حقیقت $r, \theta, v, t, c$ و متغیر هستند و بقیه پارامتر و این یعنی اینکه پارامترها در هیچ قسمتی تغییرنمی کنند. این مهم است که بین سرعت باران و پوشش آن تفاوت قائل شویم. اگر باران مثل رودخانه جریان پیوسته ای داشت در این صورت سرعت باران با نرخ پوشش در یک سطح معین بدست می آمد. روشن است که این وضع در مورد باران صادق نیست. عامل شدت باران I با تغیرات نرخ پوشش و سرعت باران، معرفی می شود [۳]. جدول ۱ فهرستی از عاملهای این مسئله را با شرح، نماد و واحد آنها نشان می دهد.

سرعت باران را ۴ متر بر ثانیه و نرخ پوشش آن را ۲ سانتی متر بر ساعت درنظر می گیریم. پس:

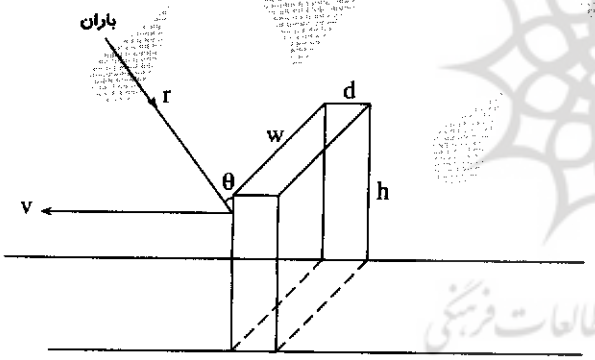
سرعت باران $= ۴ ms^{-۱} = ۴۰۰\times۳۶۰۰ cm h^{-۱} = ۱/۴۴\times۱۰^۶ cm h^{-۱}$

I را نسبت نرخ پوشش باران به سرعت باران معرفی می کنیم. برای این داده داریم:

$$I = \frac{۲}{۱/۴۴\times۱۰^۶} = \frac{۱}{۷/۲\times۱۰^۶}$$

جدول ۱

| شرح | نماد | واحد |
|---|---|---|
| زمانی که در باران قرار دارید | t | s ثانیه |
| سرعت باران | r | $ms^{-1}$ متر بر ثانیه |
| زاویه برخورد باران با شما | θ | deg درجه |
| سرعت شما | v | $ms^{-1}$ متر بر ثانیه |
| ابعاد شخص | — | — |
| بلندی | h | m متر |
| عرض | w | m متر |
| پهنا | d | m متر |
| نرخ جذب آب لباس | C | L لیتر |
| فاکتور شدت باران | I | بدون واحد |
| فاصله طی شده | D | متر |



شکل ۲

توجه کنید که عامل شدت باران یعنی I بدون واحد است. برای درک بیشتر این مطلب پس از فرمول بندی مسئله به واحدهای آن دقت کنید. اگر I = ۰ باشد یعنی باران متوقف شده است و اگر I = ۱ باشد یعنی جریان باران مانند رودخانه (به هم پیوسته) است. اکنون قادریم تا رابطه ای بین متغیرهای فهرست بالا بدست آوریم. مشکل ما فقط در مورد تخمین نرخ پوشش باران است. زیرا ممکن است در طی این مسافت سرعت و نرخ پوشش باران چندین بار تغییر کند. با درنظر گرفتن سرعتی ثابت برای شما داریم:

$$\frac{D}{V} \text{ (S)} = \text{زمانی که در باران هستید}$$

اکنون با عامل جدیدی، تعیین می کنیم که خیس شدن شما چه رابطه ای با طی این مسیر دارد. شکل ۲ به ما در یافتن این رابطه کمک می کند.

چون باران بطور مستقیم می بارد، می توان این طور فرض کرد که فقط جلو و سر شما خیس می شود. درستی این مطلب آزمایش شده است.

## تعیین جواب مدل ریاضی

اکنون شما مقدار خیس شدن خود را می توانید در ۲ حالت زیر حساب کنید. ابتدا، سطح بالای بدن خود را در نظر بگیرید.

سطح بالای بدن که در معرض باران قرار دارد = wd $(m^2)$

و

مؤلفه باران = $r \cos\theta$

بنابراین:

سرعت باران × سطحی از بدن که باران می خورد × شدت باران = نرخ خیس شدن شما

$$= I w d r \cos\theta \ m^2 s^{-1}$$

در زمان $\frac{D}{V}$، پس:

$$= \frac{IwdDr\cos\theta}{V}(m^3)$$ مقدار بارانی که در طی این مسافت به شما می‌خورد

اکنون سطح جلوی بدن را در نظر بگیرید:

$wh\ (m^2)$ = سطح جلوی بدن که درمعرض باران قرار دارد

و با توجه به شکل (۲)

$r\sin\theta + v$ = مؤلفه باران

بنابراین:

سرعت باران × سطحی از بدن که باران می‌خورد × شدت باران = نرخ خیس شدن شما

$$= Iwh(r\sin\theta + V)\ (m^3 s^{-1}) \qquad (1)$$

در زمان $\frac{D}{V}$ ، پس:

$$\frac{IwhD(r\sin\theta + V)}{V}(m^3) \qquad (2)$$ = مقدار بارانی که در طی این مسافت به شما می‌خورد

مقدارکل بارانی (C) که در طی مسافت به شما می‌خورد از جمع دو رابطه (۱) و (۲) بدست می‌آید:

$$C = \frac{IwD}{V}[rd\cos\theta + h(r\sin\theta + V)]\ (m^3) \qquad (3)$$

اکنون با جای گذاری مقادیر معادله (۳) می‌توان مقدار کل بارانی که در طی این مسافت به شما می‌خورد، بدست آورد. مقادیر کمیتهای موجود را در (۳) قرار می‌دهیم، داریم: $h = ۱/۵$، $=۰/۵$ ، $d=۰/۲$، $r=۴$ و $D=۱۰۰۰/۰$. همچنین مقدار I را در معادله (۳) قرار می‌دهیم پس:

$$C = \frac{۰/۸\cos\theta + ۶\sin\theta + ۱/۵V}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}V}(m^3) \qquad (4)$$

روشن است که مقدار C بستگی به دو متغیر V و $\theta$ دارد. این دو از این لحاظ متغیر هستند که ممکن است زاویهٔ بارش تغییر کند و یا اینکه شما سرعت خود را تغییر دهید. اکنون مسئله ما تعیین مقادیر $\theta$ و V است، بطوری که C حداقل شود.

## تغییر جواب مدل ریاضی

اکنون معادلات (۳) و (۴) را آزمایش می‌کنیم. ابتدا توجه کنید که اگر شدت باران یعنی I برابر صفر باشد در این صورت $C = ۰$ و این یعنی اینکه باران نمی‌بارد و در نتیجه شما «خیس» نمی‌شوید. در مرحلهٔ بعد توجه ما به $\theta$ معطوف می‌شود. باران یا مستقیم یا از روبرو و یا از پشت می‌بارد. معادله (۴) را برای سه حالت زیر در نظر می‌گیریم:

حالت نخست: $\theta = ۰^\circ$

در این حالت چون $\theta = ۰^\circ$ باران مستقیم می‌بارد. از معادله (۴) داریم:

$$C = \frac{۰/۸ + ۱/۵V}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}V}(m^3)$$

در این رابطه زمانی C کمترین مقدار را دارد که V بیشترین مقدار را به خود بگیرد. یعنی $V = ۶$ در این صورت با جای گذاری مقدار V در معادله فوق داریم

$$C = \frac{۹/۸}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}\times۶}(m^3)$$

لیتر $\approx ۱/۱۲$

این بدان معناست که اگر باران مستقیم ببارد باید بدوید تا کمتر خیس شوید.

حالت دوم: $\theta = ۳۰^\circ$

در این حالت باران با زاویه $۳۰^\circ$ و از روبرو می‌بارد، از معادله (۴) داریم:

$$C = \frac{(۰/۴\sqrt{۳} + ۳ + ۱/۵V)}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}V}(m^3)$$

باز هم در این حالت مقدار C حداقل است وقتی که $V=۶$ یعنی

$$C = \frac{۰/۴\sqrt{۳} + ۳ + ۹}{۱/۴۴\times۶} \approx ۱/۴۷$$ لیتر

حالت سوم: $\theta$ منفی است.

اکنون فرض کنید باران از پشت می‌بارد. یعنی $\theta$ منفی است. اگر $\theta = -\alpha$ با توجه به معادله (۴) داریم

$$C = \frac{۰/۸\cos\alpha - ۶\sin\alpha + ۱/۵V}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}V}$$

در این حالت اگر $\alpha$ به حد کافی بزرگ باشد، مدل با شکست مواجه می‌شود زیرا برای این $\alpha$، مقداری منفی برای C حاصل می‌شود و چنین چیزی ممکن نیست. برای درک بیشتر فرض کنید $\alpha$ نزدیک $۹۰^\circ$ باشد پس $\cos\alpha \to ۰$ و $\sin\alpha \to ۱$ و در نتیجه

$$C = \frac{-۶ + ۱/۵V}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}V}$$

اکنون اگر سرعت شما کمتر از ۴ متر بر ثانیه باشد در این صورت $C < ۰$ خواهد بود یعنی شما خیس نمی‌شوید!

برای اصلاح این وضع بهتر است دوباره به معادله (۲) برگردیم،

چون زمانی که $\theta = -\alpha$ باشد دو حالت اتفاق می افتد.

در حالت نخست، فرض کنید $V < r\,Sin\alpha$ در این صورت باران به پشت شما می خورد، بنابراین:

$$\frac{Iwh}{V}(r\,Sin\alpha - V) = \text{مقدار بارانی که در طی این مسافت به شما می خورد}$$

در این صورت داریم:

$$C = \frac{IwD}{V}[rd\,Cos\alpha + h(r\,Sin\alpha - V)] \quad \text{مقدار کل بارانی که به شما می خورد}$$

دوباره با جای گذاری مقادیر داریم:

$$C = \frac{۰/۸\,Cos\alpha - ۱/۵(۴\,Sin\alpha - V)}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}V}\,(m^۳) \qquad (۵)$$

حال اگر سرعت خود را به $۴Sin\alpha$ برسانید، نتیجه می گیریم:

$$C = \frac{۰/۸\,Cos\alpha}{۱/۴۴\times۱۰^{-۳}\times۴Sin\alpha}$$

که این متناظر مقدار بارانی است که فقط به بالای بدن شما می خورد. پس اگر باران با زاویه $۳۰^\circ$ از پشت شما ببارد، باید با سرعت $۴\,Sin۳۰^\circ = ۲m\,s^{-۱}$ حرکت کنید تا به حداقل ممکن خیس شوید، در این حالت

$$\frac{۰/۸\sqrt{۳}}{۲/۸۸\times۱۰^{-۳}\times۲}\,(m^۳) = ۰/۲۴ \text{ لیتر} = \text{کل مقدار بارانی که به شما می خورد}$$

و این یعنی اینکه اگر باران با زوایه $۳۰^\circ$ به پشت شما برخورد کند و سرعت شما کمتر از ۲ متر بر ثانیه باشد، در این صورت شما بیشتر خیس می شوید.

در حالت دوم، فرض کنید شما بیشتر از ۲ متر بر ثانیه سرعت دارید، در این صورت از قطرات باران پیشی می گیرید و بطور یقین بیشتر خیس می شوید. در این حالت $V > r\,Sin\alpha$ و با جای گذاری در معادله (۲) خواهیم داشت:

$$\frac{IwhD}{V}(V - Sin\alpha$$

پس کل مقدار بارانی که به شما می خورد از فرمول زیر حساب می شود:

$$C = \frac{IWD}{V}[rd\,Cos\alpha + h(V - r\,Sin\alpha)]\,(m^۳)$$

اگر $V = ۶$ و $\alpha = ۳۰^\circ$ داریم:

$$C = \frac{۰/۵\times۱۰۰۰(۰/۴\sqrt{۳}+۶)}{۷/۲\times۱۰^{۵}\times۶} \simeq ۰/۷۷ \text{ لیتر}$$

## نتیجه و مقایسه با واقعیت

به نظر می رسد نتایج موافق با واقعیت هستند. می توان متغیرها را با دید وسیعتری نگریست. برای این مدل تمام نتایج کمتر از ۲ لیتر بوده است. اگر جزئیات بیشتری را در نظر بگیریم به سختی می توان مدل را ساخت اما اینده حرکت با باران می تواند مورد استفاده قرار گیرد. فرض کنید در باران حرکت می کنید. در این صورت نتایج زیر از این مدل بدست می آیند:

۱ـ اگر باران از روبرو ببارد، در این صورت شما باید با حداکثر سرعت حرکت کنید.

۲ـ اگر باران از پشت ببارد، در این صورت با سرعتی حرکت کنید که با اندازه مولفه سرعت باران برابر باشد. یعنی اندازه بردار سرعت شما با اندازه بردار سرعت باران برابر باشد.

اکنون شما می توانید این نتایج و این مدل را در واقعیت آزمایش کنید تا به خوبی آن را درک کنید.


منابع

1- E. Fox, D. Mathews, The Physiological Basis of Physical Education And ATHLETCS/ Vol.2.1981

2- G. Hi, Biomechanic of Tecnical Athletics, 1990

3. D. Edwards, M. Hamson, Guide to mathematical Modelling, 1989, MACMILLAN

۴ـ علیزاده، امین، اصول هیدرولوژی کاربردی، انتشارات آستان قدس رضوی، ۱۳۶۶